

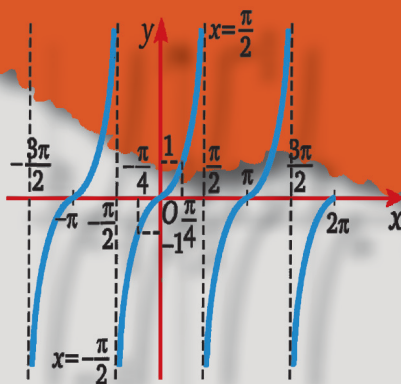
Ministerul Educației și Cercetării

Matematică

Trunchi comun + curriculum diferențiat

Manual pentru clasa a IX - a

Dumitru Săvulescu
Marin Chirciu
Ștefan Alexe
Nicolae Dragomir
Tudor Deaconu
Alice Raluca Petrescu



CORINT

Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor

1. Relații și operații cu mulțimi (recapitulare)

Începem cu o recapitulare succintă a mulțimilor, relațiilor și operațiilor cu acestea.

Mulțimea este o **colecție de obiecte** distincte. Obiectele mulțimii se numesc **elemente**.

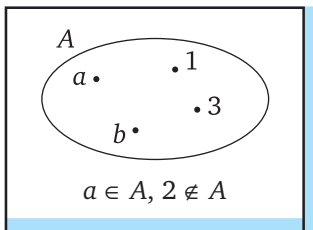
Mulțimile se notează cu litere mari ale alfabetului; elementele sale se scriu între acolade.

O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sau specificând o proprietate caracteristică a acestora.

Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează \emptyset .

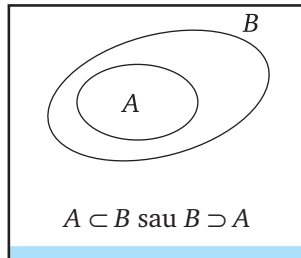
1.1. Relații

Apartenența sau nonapartența unui element la o mulțime

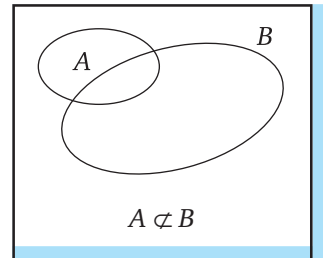


„ \in ” aparține
„ \notin ” nu aparține

Incluziunea, submulțime



„ \subset ” inclus; „ \supset ” include
A este submulțime a lui B

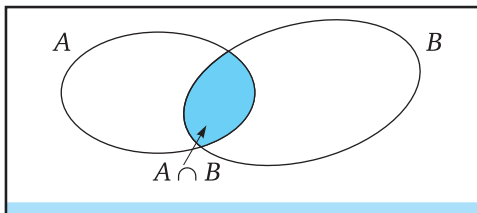


„ $\not\subset$ ” nu este inclus

Egalitatea mulțimilor. $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ (A și B au aceleași elemente).

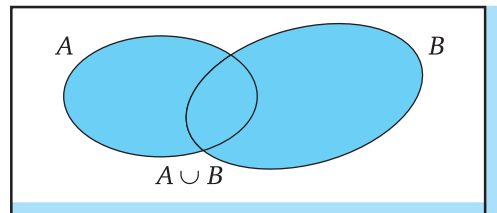
1.2. Operații cu mulțimi

Intersecția

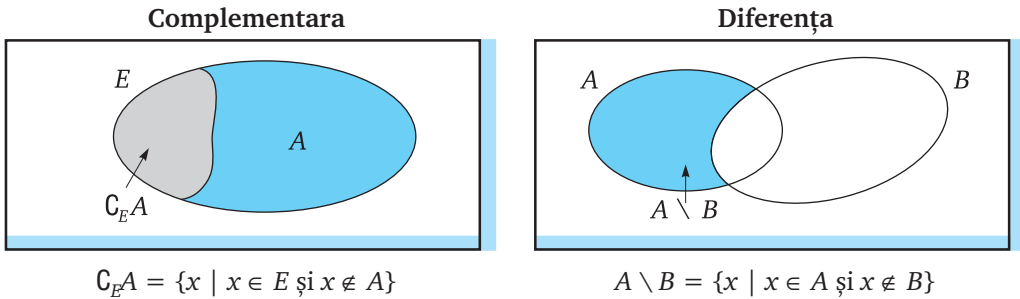


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

Reuniunea



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$



Produsul cartezian. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observație: $A \times B \neq B \times A$.

2. Mulțimea numerelor reale

Numerele sunt un produs al inteligenței omului, cu ajutorul cărora acesta percepe aspectele cantitative ale lumii înconjurătoare și stabilește relații de ordine între ele.

Acest instrument – numerele – s-a perfecționat o dată cu dezvoltarea necesităților omului. Astfel au rezultat următoarele mulțimi de numere: numerele naturale, numerele întregi, numerele raționale, numerele reale.

Pornind de la mulțimea numerelor naturale, pot fi construite toate celelalte mulțimi de numere.

Fundamentul acestei construcții logice îl constituie teoria mulțimilor și logica matematică.

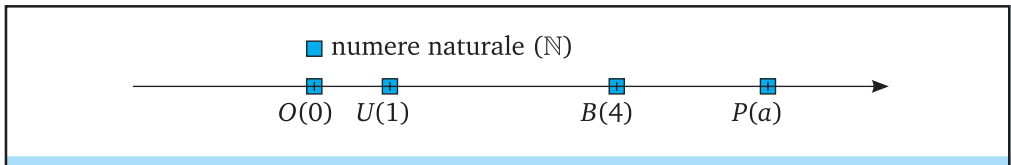
2.1. Mulțimea numerelor naturale; operații algebrice

Cea mai simplă mulțime de numere este mulțimea numerelor naturale:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Definiție

O dreaptă pe care fixăm un punct O (numit *origine*), un segment OU a cărui lungime se consideră egală cu unitatea și un sens pozitiv indicat de săgeată (de la O spre U) se numește **axa numerelor** sau **axă de coordonate**.



Numărului natural 0 îi corespunde punctul O . Numărului natural 1 îi corespunde punctul U .

Definiție

Oricărui număr natural a îi corespunde punctul P aflat pe semidreapta (OU astfel încât lungimea segmentului OP este a . Punctul P se numește **imaginea numărului a** , iar a se numește **abscisa punctului P** .

Pe mulțimea numerelor naturale se definesc două operații algebrice: *adunarea și înmulțirea*. Aceste operații au următoarele **proprietăți**:

- $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$ (*comutativitate*);
- $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$ (*asociativitate*);
- $a + 0 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ (0 este *element neutru* pentru adunare);
 $a \cdot 1 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ (1 este *element neutru* pentru înmulțire);
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$ (*distributivitatea înmulțirii față de adunare*).

Observații:

- Fiind date numerele naturale a și b , dacă există numerele naturale x și y astfel încât $a + x = b$, $a \cdot y = b$ ($a \neq 0$), atunci $x = b - a$ reprezintă **diferența** celor două numere, iar $y = b : a$ reprezintă **câtul** celor două numere. Dacă aceste două numere există, atunci ele sunt unic determinate și $a + (b - a) = (a + b) - a = b$, $a \cdot (b : a) = (a \cdot b) : a = b$.
- Scăderea și împărțirea sunt operațiile inverse adunării, respectiv înmulțirii. Totuși, diferența și câtul nu există pentru orice numere naturale a și b .

Exemple:

- Dacă $a = 3 \in \mathbb{N}$ și $b = 2 \in \mathbb{N}$ cu $3 + x = 2$, atunci $x = 2 - 3 \notin \mathbb{N}$.
- Dacă $a = 5 \in \mathbb{N}$ și $b = 3 \in \mathbb{N}$ cu $5 \cdot y = 3$, atunci $y = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $a \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ **puterea a n -a a lui a** .

Înmulțirea, ridicarea la putere și împărțirea puterilor se fac după următoarele **reguli**. Pentru $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$ avem:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, $n > m$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$;
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

2.1.1. Ordonarea numerelor naturale

Pentru două numere naturale oarecare a și b se introduce o relație de ordine în felul următor: dacă există un număr $c \neq 0$ astfel încât $a = b + c$, atunci se spune că a este **mai mare decât b** și se notează $a > b$ (Putem spune și că b este *mai mic decât a* și notăm $b < a$). Această relație este într-adevăr o relație de ordine.

2.1.2. Proprietățile relației de ordine pe mulțimea numerelor naturale

Trichotomie. Două numere naturale oarecare a și b sunt neapărat într-una din relațiile $a > b$, $b > a$ sau $a = b$.

Monotonia adunării și înmulțirii. Dacă $a > b$, iar c și d sunt două numere naturale nenule, atunci $a + c > b + c$ și $a \cdot d > b \cdot d$.

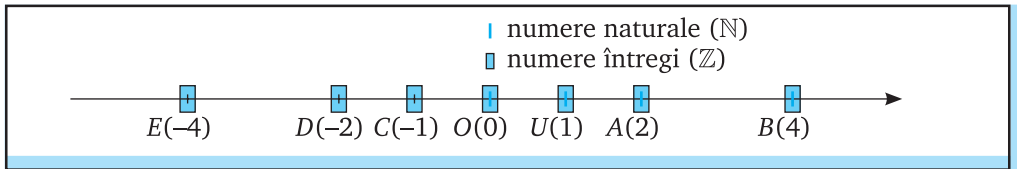
Axioma lui Arhimede. Pentru două numere naturale oarecare a și b , $a > 0$, există un număr natural n astfel încât $a \cdot n > b$.

Ținând seama de aceste proprietăți, mulțimea numerelor naturale se spune că este *liniară și arhimedic ordonată*.

2.2. Mulțimea numerelor întregi; operații algebrice

Anterior am văzut că scăderea și împărțirea nu se pot efectua întotdeauna în mulțimea numerelor naturale. Acest fapt a condus la extinderea mulțimii \mathbb{N} la mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$



Pe mulțimea numerelor întregi se definesc două operații: *adunarea și înmulțirea*. Proprietățile verificate de aceste operații în cazul numerelor naturale rămân valabile și pentru numerele întregi. În plus, la acestea se mai adaugă unele proprietăți noi.

Definiție

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, există elementul $-a \in \mathbb{Z}$ care se numește **opusul lui a** și are proprietatea:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

2.2.1. Proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire cu numere întregi

- Dacă $x = y$, atunci $x + z = y + z$ și $xz = yz$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $x + z = y + z$, atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $xz = yz$, $z \neq 0$, atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $x, y > 0$ sau $x, y < 0$, atunci $x \cdot y > 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $x > 0, y < 0$ sau $x < 0, y > 0$, atunci $x \cdot y < 0$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.
- Dacă $x = 0, y \in \mathbb{Z}$ sau $y = 0, x \in \mathbb{Z}$, atunci $x \cdot y = 0$.
- În mulțimea numerelor întregi, diferența a două numere întregi este tot un număr întreg.

Vom nota mulțimea numerelor naturale nenule cu \mathbb{N}^* , iar mulțimea numerelor întregi nenule cu \mathbb{Z}^* .

2.3. Mulțimea numerelor raționale; operații algebrice

Împărțirea necesită o mulțime de numere în care să se poată efectua și alte operații decât cele admise pentru numerele întregi.

Rezolvarea ecuației de forma $ax = b$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ a condus la introducerea numerelor raționale și a mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

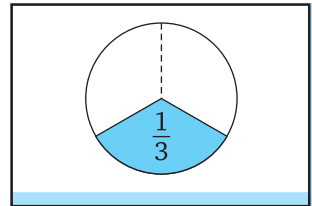
Așadar, un număr rațional este o fracție $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Definiție

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$ și $b, d \in \mathbb{Z}^*$ se numesc *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$.
Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește **număr rațional**.

Exemplu:

Mulțimea fracțiilor $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \dots \right\}$ obținute prin amplificare sau simplificare reprezintă numărul rațional unic $\frac{1}{3}$.



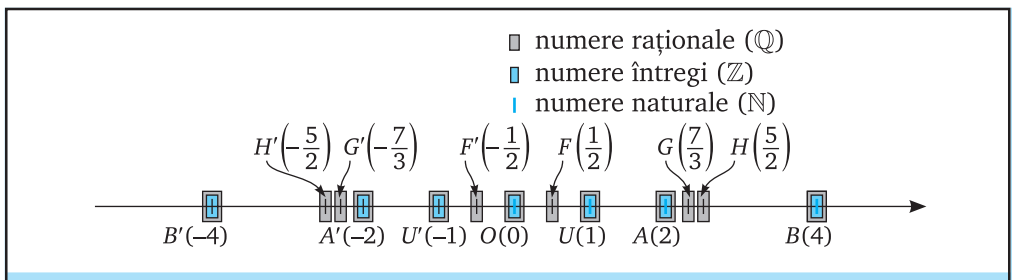
Observații:

1. Orice număr întreg poate fi scris ca o fracție cu numitorul 1.
2. În clasele anterioare, pe mulțimea numerelor raționale a fost definită o relație de ordine.
3. Mulțimea numerelor raționale este înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire.

Considerăm cunoscute proprietățile relației de ordine și ale operațiilor cu numere raționale.

Mulțimea numerelor raționale pozitive se notează $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \frac{a}{b} > 0 \right\}$.

Mulțimea numerelor raționale negative se notează $\mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \frac{a}{b} < 0 \right\}$.



2.3.1. Forme de scriere a unui număr rațional

În clasele anterioare am învățat că orice număr rațional poate fi scris în două moduri:

- sub formă de fracție ordinară (ca raport de două numere întregi);
- sub formă de fracție zecimală (finită sau infinită periodică).

2.3.1.1. Trecerea de la o fracție ordinară la o fracție zecimală

Aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale putem trece de la o fracție ordinară $\frac{a}{b}$ (unde $a \geq 0, b > 0$) la o fracție zecimală (finită sau infinită, periodică simplă ori mixtă).

Exemple:

Să transformăm în fracții zecimale următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{41}{33}$; c) $\frac{7}{12}$.

Trecerea de la forma de scriere fracționară la cea cu virgulă se face prin împărțirea numărătorului la numitor. Avem:

a) $\frac{4}{5} = 0,8$; b) $\frac{41}{33} = 1,2424\dots$; c) $\frac{7}{12} = 0,5833\dots$

Aceste scrieri sunt unice. În exemplul a) fracția zecimală obținută este **finită** deoarece după virgulă avem un număr finit de zecimale nenule.

În exemplele b) și c), fracțiile zecimale obținute sunt **infinite**, având la dreapta virgulei un număr infinit de zecimale.

Fracțiile zecimale în care una sau mai multe zecimale se repetă de o infinitate de ori se numesc **fracții zecimale periodice**.

În exemplul b), gruparea (24) se numește **perioadă**. Această fracție se scrie mai simplu $1,(24)$.

În exemplul c), perioada este 3, iar fracția $0,5833\dots$ se scrie sub forma $0,58(3)$.

Definiții

- Frațiile la care perioada urmează imediat după virgulă se numesc **fracții periodice simple**.
- Frațiile la care perioada nu urmează imediat după virgulă se numesc **fracții periodice mixte**.
- Frațiile periodice mixte au după virgulă una sau mai multe zecimale care nu se repetă de o infinitate de ori. Această parte a fracției care nu se repetă se numește **partea neperiodică**.

Prin urmare, orice număr rațional poate fi scris ca fracție zecimală finită (exactă) sau ca fracție zecimală infinită periodică. De asemenea, orice fracție zecimală finită sau infinită periodică, cu perioada diferită de (9) reprezintă un număr rațional.

2.3.1.2. Trecerea de la fracția zecimală finită sau infinită periodică la fracție ordinară

a) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și a_1, a_2, \dots, a_k sunt cifre, atunci $a_0, a_1 a_2 \dots a_k = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100\dots0}_k \text{ zerouri}}$.

Exemple:

$$3,24 = 3 \frac{24}{1000} = \frac{3024}{1000} = \frac{378}{125}; -3,024 = -3 \frac{24}{1000} = -\frac{3024}{1000} = -\frac{378}{125}.$$

b) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și a_1, a_2, \dots, a_k sunt cifre, atunci $a_0, (a_1 a_2 \dots a_k) = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99\dots9}_k \text{ cifre}}$.

Exemple:

$$0,(236) = \frac{236}{999}; -0,(236) = -\frac{236}{999}.$$

c) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+p}$ sunt cifre, atunci

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} \dots a_{k+p}) = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_{k+p}} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99\dots9}_{p \text{ cifre}} \underbrace{00\dots0}_k \text{ cifre}}.$$

Exemple:

$$1,2(36) = 1 \frac{236-2}{990} = 1 \frac{234}{990} = 1 \frac{13}{55}; -1,2(36) = -1 \frac{13}{55}.$$

Observație: Orice fracție zecimală finită este periodică de perioadă zero.

Reciproc, avem următorul rezultat:

Teoremă

Orice număr rațional se reprezintă în mod unic sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

Observație: Dacă am admite existența fracțiilor zecimale cu perioada 9, atunci aplicând regula de mai sus am obține aparent, rezultate diferite.

Exemplu:

$$17,(9) = 17 \frac{9}{9} = 17 + 1 = 18, \text{ iar } 18 = 18,(0).$$

Pentru a păstra unicitatea scrierii numerelor raționale ca fracții zecimale, nu vom lua în considerare fracțiile zecimale cu perioada 9, dar vom admite scrierea fracțiilor zecimale finite ca fracții infinite periodice cu perioada 0.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Algebră

1. Cercetați dacă există numere naturale care împărțite la $2n + 2$ să dea restul $2n$ și împărțite la $2n$ să dea restul $2n - 1$, unde n este număr natural nenul.
2. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ este pătrat perfect.
b) Arătați că un produs de 2 numere naturale consecutive nu este pătrat perfect.
c) Arătați că un produs de 3 numere naturale consecutive nu este cub perfect.
3. a) Arătați că există 7 numere naturale consecutive neprime.
b) Arătați că există n numere naturale consecutive neprime, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Arătați că următoarele numere sunt prime între ele:
a) $3n + 2$ și $4n + 3$, $n \in \mathbb{N}$; b) $k \cdot n + k - 1$ și $(k + 1)n + k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
5. a) Arătați că fracția $\frac{n+2}{2n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Arătați că fracția $\frac{n+k}{2n+2k-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ este ireductibilă.
6. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{n^2+2003} \in \mathbb{Q}$.
7. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2250}$.
8. a) Fie $k \in \mathbb{Q}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - kb^2 = 1\}$. Determinați o valoare strict pozitivă a lui k astfel încât pentru orice $x, y \in H$ să avem $xy \in H$.
b) Fie $k \in \mathbb{Q}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - kb^2 = 1\}$. Determinați o valoare strict pozitivă a lui k astfel încât pentru orice $x, y \in H$ să avem $xy \in H$.
9. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c \in \mathbb{Q}$ și $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$.
Demonstrați că $ab + bc + ca \in \mathbb{Q}$.
b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$, $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{Q}$.
Demonstrați că $abc \in \mathbb{Q}$.
10. Arătați că $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ nu sunt numere raționale.
11. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^3 + b^3 + c^3$ și $a + b + c$ se divid cu 7.
Demonstrați că abc se divide cu 7.
12. Fie $x, y \in \mathbb{Q}^*$ și $z = \frac{xy}{x+y}$, $x + y \neq 0$. Arătați că $x^2 + y^2 + z^2$ este pătratul unui număr rațional.



Cuprins

1. Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor	3
1. Relații și operații cu mulțimi (recapitulare)	3
1.1. Relații	3
1.2. Operații cu mulțimi	3
2. Mulțimea numerelor reale	4
2.1. Mulțimea numerelor naturale; operații algebrice	4
2.2. Mulțimea numerelor întregi; operații algebrice	6
2.3. Mulțimea numerelor raționale; operații algebrice	7
2.4. Mulțimea numerelor reale	11
2.5. Intervale de numere reale	25
*2.6. Inegalități remarcabile	29
3. Elemente de logică matematică	37
3.1. Enunț, propoziție, valoare de adevăr	37
3.2. Operații logice elementare în mulțimea propozițiilor	38
3.3. Predicate. Cuantificatori	44
3.4. Echivalența și corelarea operațiilor logice elementare cu operațiile și relațiile cu mulțimi	49
3.5. Condiții necesare, condiții suficiente	51
4. Tipuri de raționamente logice	54
4.1. Legea dublei negații	54
4.2. Legea terțiului exclus	54
4.3. Reducerea la absurd	54
4.4. Inducția matematică	55
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale: șiruri, progresii. Probleme de numărare	61
1. Modalități de a defini un șir; șiruri măginite, șiruri monotone	61
1.1. Șiruri; generalități	61
1.2. Modalități de a defini un șir	62
1.3. Șiruri măginite	63
1.4. Șiruri monotone	64
2. Progresii aritmetice	69
2.1. Definiția progresiei aritmetice	69
2.2. Proprietățile progresiei aritmetice	70
2.3. Formula termenului general al unei progresii aritmetice	71
2.4. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice	72
3. Progresii geometrice	76
3.1. Definiția progresiei geometrice	76
3.2. Proprietățile progresiei geometrice	77
3.3. Formula termenului general al unei progresii geometrice	78
3.4. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice	79

4. Probleme de numărare	83
4.1. Completarea unui șir cu încă p termeni, $p \in \mathbb{N}^*$	83
4.2. Numărarea termenilor dintr-un șir	83
4.3. Determinarea termenului de pe locul n , $n \geq 1$, dintr-un șir	84
4.4. Aflarea sumei primilor n termeni dintr-un șir	84
4.5. Numărarea unor numere care au o anumită proprietate	85
4.6. Aflarea poziției ocupate de un număr într-un șir	87
4.7. Numărarea aparițiilor unei cifre în scrierea unui număr	88
3. Funcții, lecturi grafice	91
1. Reper cartezian, produs cartezian	91
1.1. Reper cartezian	91
1.2. Produsul cartezian a două mulțimi	92
1.3. Drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbb{R}$	94
2. Funcții	95
2.1. Noțiunea de funcție	95
2.2. Modalități de a descrie o funcție	96
2.3. Funcții egale	97
2.4. Prelungirea și restricția unei funcții	98
2.5. Graficul unei funcții	98
2.6. Imaginea și preimaginea unei funcții	98
2.7. Funcția identică	100
2.8. Lecturi grafice	100
3. Funcții numerice. Operații cu funcții numerice	104
3.1. Operații cu funcții numerice	104
3.2. Graficul unei funcții numerice	104
3.3. Intersecția graficului cu axele de coordonate	105
3.4. Funcții mărginite	105
3.5. Funcții pare și funcții impare	106
3.6. Simetria graficului unei funcții față de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$, sau față de puncte oarecare din plan	106
3.7. Funcții monotone	107
3.2. Funcții periodice	108
4. Compunerea funcțiilor	109
*5. Inversa unei funcții	112
4. Funcția de gradul întâi	115
1. Definiția funcției de gradul întâi și reprezentarea geometrică a graficului	115
2. Monotonia și semnul funcției de gradul întâi	117
3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b < 0$	119
3.1. Semnul unui produs	120
3.2. Semnul unui raport	121
4. Pozițiile relative a două drepte în plan	122
5. Sisteme de forma $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$	122
5.1. Metode de rezolvare	123
6. Sisteme de inecuații de gradul întâi	125

5. Funcția de gradul al doilea	130
1. Definiția funcției de gradul al doilea	130
2. Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul al doilea	131
3. Relațiile lui Viète	134
4. Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}, s, p \in \mathbb{R}$	135
6. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al doilea	137
1. Monotonia funcției de gradul al doilea	137
2. Semnul funcției de gradul al doilea	139
3. Inecuații de gradul al doilea	141
3.1. Exemple de rezolvare	141
3.2. Alte tipuri de inecuații de gradul al doilea	142
3.3. Imagini și preimagini ale unor intervale	143
4. Sisteme de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}, a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$	144
4.1. Metoda de rezolvare	144
4.2. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	145
4.3. Interpretarea geometrică	145
4.4. Sisteme reducibile la cele studiate	147
5. Sisteme de forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$	148
5.1. Metoda de rezolvare	148
5.2. Interpretarea geometrică	148
7. Vectori în plan	154
Introducere	154
1. Vectori	154
1.1. Segment orientat, relația de echipolență, vectori, vectori coliniari	154
1.2. Direcție	155
1.3. Sens	156
1.4. Lungime	156
1.5. Segmente echipolente. Vectori	157
2. Operații cu vectori	159
2.1. Adunarea vectorilor	159
2.2. Înmulțirea unui vector cu un număr real	161
2.3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat	162
2.4. Descompunerea unui vector după două direcții date	162
8. Coliniaritate, concurență, paralelism – calcul vectorial în geometria plană	165
1. Vectorul de poziție al unui punct	165
2. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat. Teorema lui Thales; condiții de paralelism	167
2.1. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat	167
2.2. Teorema lui Thales	168
2.3. Condiții de paralelism	169

3. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi.	
Concurența medianelor unui triunghi	169
3.1. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi	169
3.2. Concurența medianelor	170
4. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi	171
4.1. Teorema bisectoarei	171
4.2. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi	173
5. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester. Concurența înălțimilor	174
5.1. Relația lui Sylvester și aplicații	174
5.2. Concurența înălțimilor	176
6. Teorema lui Menelaos; teorema lui Ceva	177
6.1. Teorema lui Menelaos și aplicații	177
6.2. Teorema lui Ceva și aplicații	179
9. Elemente de trigonometrie	184
1. Cercul trigonometric	184
2. Funcții trigonometrice definite pe $[0, 2\pi]$, respectiv $[0, \pi]$	187
3. Funcții trigonometrice definite pe \mathbb{R}	190
3.1. Funcțiile sinus și cosinus	190
3.2. Funcția tangență	192
3.3. Funcția cotangență	194
4. Formule de reducere la primul cadran	196
5. Formule trigonometrice (pentru sume, diferențe)	200
6. Formule trigonometrice pentru dublul unui număr	206
7. Formule pentru $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	207
8. Formule pentru transformarea sumei în produs	213
9. Formule pentru transformarea produselor de funcții trigonometrice în sume sau diferențe	214
10. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană	220
1. Produsul scalar a doi vectori	220
1.1. Definiție, proprietăți	220
1.2. Teorema cosinusului	222
*1.3. Teorema lui Stewart	224
1.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	225
2. Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie	227
2.1. Teorema sinusurilor	227
2.2. Rezolvarea triunghiului oarecare	227
2.3. Calculul razei cercului înscris și a cercului circumscris triunghiului	229
2.4. Calculul lungimilor unor segmente importante din triunghi	230
2.5. Calcul de arii	233
11. Exerciții și probleme recapitulative	239
Indicații și răspunsuri	259
Bibliografie	284