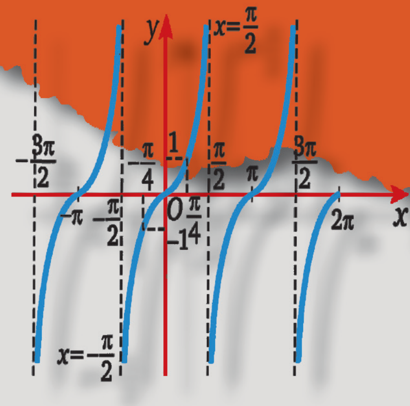
Ministerul Educaţiei şi Cercetării

# Matematică

Trunchi comun + curriculum diferenţiat





Dumitru Săvulescu
Marin Chirciu
Ştefan Alexe
Nicolae Dragomir
Tudor Deaconu
Alice Raluca Petrescu


Manual pentru clasa a IX -a

CORINT

CAPITOLUL 1

# Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor

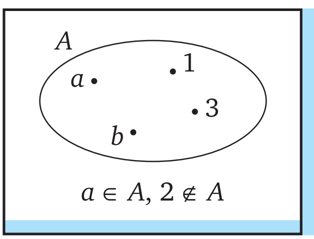
## 1. Relații și operații cu mulțimi (recapitulare)

Începem cu o recapitulare succintă a mulțimilor, relațiilor și operațiilor cu acestea.

Mulțimea este **o colecție de obiecte** distincte. Obiectele mulțimii se numesc **elemente**.
Mulțimile se notează cu litere mari ale alfabetului; elementele sale se scriu între acolade.
O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sau specificând o proprietate caracteristică a acestora.
Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează $\varnothing$.

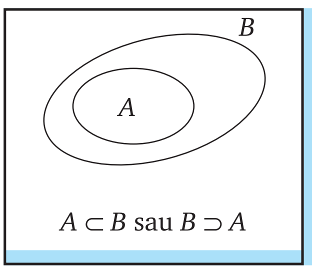
### 1.1. Relații

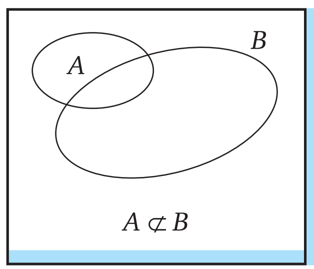
**Apartenența sau nonapartenența unui element la o mulțime**




„$\in$" aparține
„$\notin$" nu aparține

**Incluziunea, submulțime**



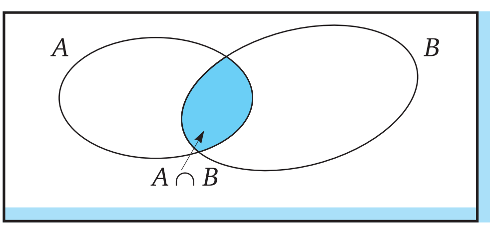

„$\subset$" inclus; „$\supset$" include
$A$ este submulțime a lui $B$

„$\not\subset$" nu este inclus

**Egalitatea mulțimilor.** $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ ($A$ și $B$ au aceleași elemente).

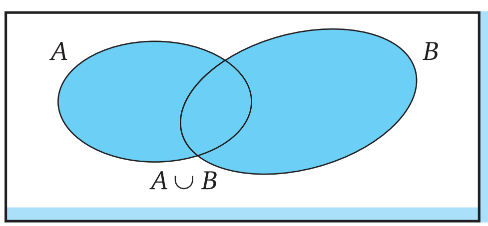
### 1.2. Operații cu mulțimi

**Intersecția**



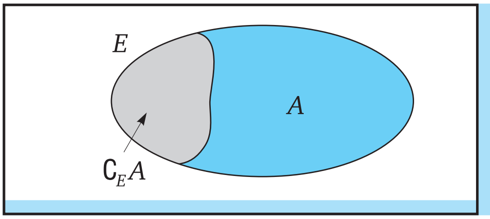

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

**Reuniunea**



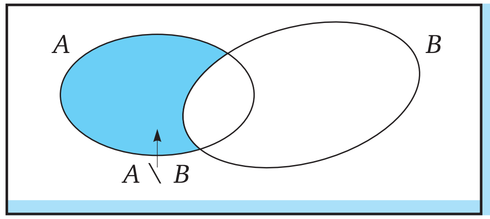

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

**Complementara**




$\complement_E A = \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin A\}$

**Diferența**




$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

**Produsul cartezian.** $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
Observație: $A \times B \neq B \times A$.

# 2. Mulțimea numerelor reale

Numerele sunt un produs al inteligenței omului, cu ajutorul cărora acesta percepe aspectele cantitative ale lumii înconjurătoare și stabilește relații de ordine între ele.

Acest instrument – numerele – s-a perfecționat o dată cu dezvoltarea necesităților omului. Astfel au rezultat următoarele mulțimi de numere: numerele naturale, numerele întregi, numerele raționale, numerele reale.

Pornind de la mulțimea numerelor naturale, pot fi construite toate celelalte mulțimi de numere.

Fundamentul acestei construcții logice îl constituie teoria mulțimilor și logica matematică.

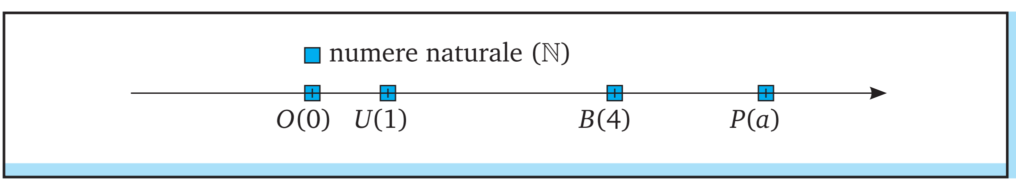
## 2.1. Mulțimea numerelor naturale; operații algebrice

Cea mai simplă mulțime de numere este mulțimea numerelor naturale:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

**Definiție**

O dreaptă pe care fixăm un punct $O$ (numit *origine*), un segment $OU$ a cărui *lungime* se consideră *egală cu unitatea* și un *sens pozitiv indicat de săgeată* (de la $O$ spre $U$) se numește **axa numerelor** sau **axă de coordonate**.




Numărului natural 0 îi corespunde punctul $O$. Numărului natural 1 îi corespunde punctul $U$.

**Definiție**

Oricărui număr natural $a$ îi corespunde punctul $P$ aflat pe semidreapta $(OU$ astfel încât lungimea segmentului $OP$ este $a$. Punctul $P$ se numește **imaginea numărului $a$**, iar $a$ se numește **abscisa punctului $P$**.

Pe mulțimea numerelor naturale se definesc două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*. Aceste operații au următoarele **proprietăți**:

a) $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$ (*comutativitate*);

b) $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$ (*asociativitate*);

c) $a + 0 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ (0 este *element neutru* pentru adunare);
$a \cdot 1 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ (1 este *element neutru* pentru înmulțire);

d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$ (*distributivitatea înmulțirii față de adunare*).

Observații:

1. Fiind date numerele naturale $a$ și $b$, dacă există numerele naturale $x$ și $y$ astfel încât $a + x = b$, $a \cdot y = b$ $(a \neq 0)$, atunci $x = b - a$ reprezintă **diferența** celor două numere, iar $y = b : a$ reprezintă **câtul** celor două numere. Dacă aceste două numere există, atunci ele sunt unic determinate și $a + (b - a) = (a + b) - a = b$, $a \cdot (b : a) = (a \cdot b) : a = b$.
2. Scăderea și împărțirea sunt operațiile inverse adunării, respectiv înmulțirii. Totuși, diferența și câtul nu există pentru orice numere naturale $a$ și $b$.

**Exemple:**

1. Dacă $a = 3 \in \mathbb{N}$ și $b = 2 \in \mathbb{N}$ cu $3 + x = 2$, atunci $x = 2 - 3 \notin \mathbb{N}$.
2. Dacă $a = 5 \in \mathbb{N}$ și $b = 3 \in \mathbb{N}$ cu $5 \cdot y = 3$, atunci $y = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $a \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ **puterea a $n$-a a lui $a$**.

Înmulțirea, ridicarea la putere și împărțirea puterilor se fac după următoarele **reguli**. Pentru $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$ avem:

**1.** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; **2.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; **3.** $a^n : a^m = a^{n-m}$, $n > m$;

**4.** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$; **5.** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

## 2.1.1. Ordonarea numerelor naturale

Pentru două numere naturale oarecare $a$ și $b$ se introduce o relație de ordine în felul următor: dacă există un număr $c \neq 0$ astfel încât $a = b + c$, atunci se spune că $a$ este **mai mare decât** $b$ și se notează $a > b$ (Putem spune și că $b$ este *mai mic decât* $a$ și notăm $b < a$). Această relație este într-adevăr o relație de ordine.

### 2.1.2. Proprietățile relației de ordine pe mulțimea numerelor naturale

**Trichotomie.** Două numere naturale oarecare $a$ și $b$ sunt neapărat într-una din relațiile $a > b$, $b > a$ sau $a = b$.

**Monotonia adunării și înmulțirii.** Dacă $a > b$, iar $c$ și $d$ sunt două numere naturale nenule, atunci $a + c > b + c$ și $a \cdot d > b \cdot d$.

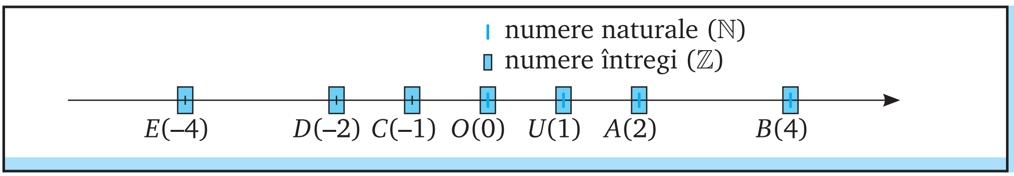
**Axioma lui Arhimede.** Pentru două numere naturale oarecare $a$ și $b$, $a > 0$, există un număr natural $n$ astfel încât $a \cdot n > b$.

Ținând seama de aceste proprietăți, mulțimea numerelor naturale se spune că este *liniară și arhimedic ordonată*.

## 2.2. Mulțimea numerelor întregi; operații algebrice

Anterior am văzut că scăderea și împărțirea nu se pot efectua întotdeauna în mulțimea numerelor naturale. Acest fapt a condus la extinderea mulțimii $\mathbb{N}$ la mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}.$$




Pe mulțimea numerelor întregi se definesc două operații: *adunarea* și *înmulțirea*. Proprietățile verificate de aceste operații în cazul numerelor naturale rămân valabile și pentru numerele întregi. În plus, la acestea se mai adaugă unele proprietăți noi.

**Definiție**

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, există elementul $-a \in \mathbb{Z}$ care se numește **opusul lui *a*** și are proprietatea:

$$\boxed{a + (-a) = (-a) + a = 0}$$

### 2.2.1. Proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire cu numere întregi

a) Dacă $x = y$, atunci $x + z = y + z$ și $xz = yz$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
b) Dacă $x + z = y + z$, atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
c) Dacă $xz = yz$, $z \neq 0$, atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
d) Dacă $x, y > 0$ sau $x, y < 0$, atunci $x \cdot y > 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.
e) Dacă $x > 0, y < 0$ sau $x < 0, y > 0$, atunci $x \cdot y < 0$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.
f) Dacă $x = 0, y \in \mathbb{Z}$ sau $y = 0, x \in \mathbb{Z}$, atunci $x \cdot y = 0$.
g) În mulțimea numerelor întregi, diferența a două numere întregi este tot un număr întreg.

Vom nota mulțimea numerelor naturale nenule cu $\mathbb{N}^*$, iar mulțimea numerelor întregi nenule cu $\mathbb{Z}^*$.

## 2.3. Mulțimea numerelor raționale; operații algebrice

Împărțirea necesită o mulțime de numere în care să se poată efectua și alte operații decât cele admise pentru numerele întregi.

Rezolvarea ecuației de forma $ax = b$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ a condus la introducerea numerelor raționale și a mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$.

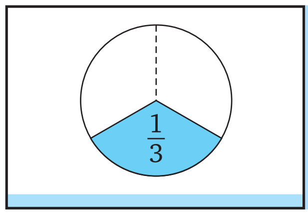
Așadar, un număr rațional este o fracție $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

**Definiție**

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$ și $b, d \in \mathbb{Z}^*$ se numesc *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$.
Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește **număr rațional**.

**Exemplu:**

Mulțimea fracțiilor $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \dots \right\}$ obținute prin amplificare sau simplificare reprezintă numărul rațional unic $\frac{1}{3}$.



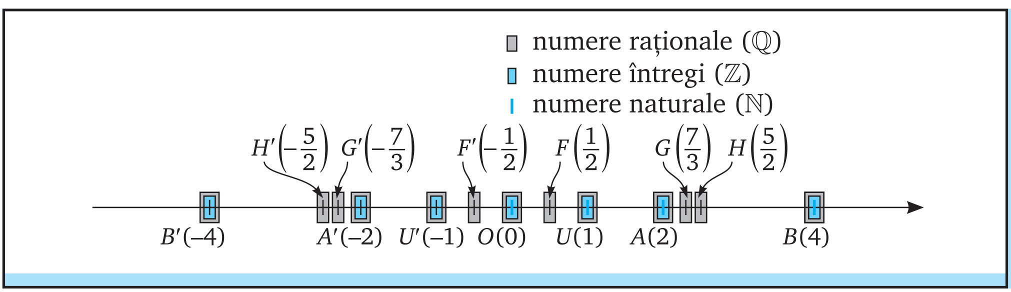

Observații:

1. Orice număr întreg poate fi scris ca o fracție cu numitorul 1.
2. În clasele anterioare, pe mulțimea numerelor raționale a fost definită o relație de ordine.
3. Mulțimea numerelor raționale este înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire.

Considerăm cunoscute proprietățile relației de ordine și ale operațiilor cu numere raționale.

Mulțimea numerelor raționale pozitive se notează $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \frac{a}{b} > 0 \right\}$.

Mulțimea numerelor raționale negative se notează $\mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \frac{a}{b} < 0 \right\}$.



## 2.3.1. Forme de scriere a unui număr rațional

În clasele anterioare am învățat că orice număr rațional poate fi scris în două moduri:

- sub formă de fracție ordinară (ca raport de două numere întregi);
- sub formă de fracție zecimală (finită sau infinită periodică).

### 2.3.1.1. Trecerea de la o fracție ordinară la o fracție zecimală

Aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale putem trece de la o fracție ordinară $\frac{a}{b}$ (unde $a \geq 0$, $b > 0$) la o fracție zecimală (finită sau infinită, periodică simplă ori mixtă).

**Exemple:**

Să transformăm în fracții zecimale următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{41}{33}$; c) $\frac{7}{12}$.

Trecerea de la forma de scriere fracționară la cea cu virgulă se face prin împărțirea numărătorului la numitor. Avem:

a) $\frac{4}{5} = 0{,}8$; b) $\frac{41}{33} = 1{,}2424...$; c) $\frac{7}{12} = 0{,}5833...$ .

Aceste scrieri sunt unice. În exemplul a) fracția zecimală obținută este **finită** deoarece după virgulă avem un număr finit de zecimale nenule.

În exemplele b) și c), fracțiile zecimale obținute sunt **infinite**, având la dreapta virgulei un număr infinit de zecimale.

Fracțiile zecimale în care una sau mai multe zecimale se repetă de o infinitate de ori se numesc **fracții zecimale periodice**.

În exemplul b), gruparea (24) se numește **perioadă**. Această fracție se scrie mai simplu 1,(24).

În exemplul c), perioada este 3, iar fracția 0,5833... se scrie sub forma 0,58(3).

**Definiții**

- Fracțiile la care perioada urmează imediat după virgulă se numesc **fracții periodice simple**.
- Fracțiile la care perioada nu urmează imediat după virgulă se numesc **fracții periodice mixte**.
- Fracțiile periodice mixte au după virgulă una sau mai multe zecimale care nu se repetă de o infinitate de ori. Această parte a fracției care nu se repetă se numește **partea neperiodică**.

Prin urmare, orice număr rațional poate fi scris ca fracție zecimală finită (exactă) sau ca fracție zecimală infinită periodică. De asemenea, orice fracție zecimală finită sau infinită periodică, cu perioada diferită de (9) reprezintă un număr rațional.

### 2.3.1.2. Trecerea de la fracția zecimală finită sau infinită periodică la fracție ordinară

a) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_k$ sunt cifre, atunci $a_0,a_1a_2...a_k = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2...a_k}}{1\underbrace{00...0}_{k\text{ zerouri}}}$.

**Exemple:**

$3,24 = 3\dfrac{24}{1000} = \dfrac{3024}{1000} = \dfrac{378}{125}$; $-3,024 = -3\dfrac{24}{1000} = -\dfrac{3024}{1000} = -\dfrac{378}{125}$.

b) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_k$ sunt cifre, atunci $a_0,(a_1a_2...a_k) = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{k\text{ cifre}}}$.

**Exemple:**

$0,(236) = \dfrac{236}{999}$; $-0,(236) = -\dfrac{236}{999}$.

c) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+p}$ sunt cifre, atunci

$$a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}...a_{k+p}) = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}} - \overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p\text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{k\text{ cifre}}}.$$

**Exemple:**

$1,2(36) = 1\dfrac{236-2}{990} = 1\dfrac{234}{990} = 1\dfrac{13}{55}$; $-1,2(36) = -1\dfrac{13}{55}$.

**Observație:** Orice fracție zecimală finită este periodică de perioadă zero.

Reciproc, avem următorul rezultat:

**Teoremă**

Orice număr rațional se reprezintă în mod unic sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

**Observație:** Dacă am admite existența fracțiilor zecimale cu perioada 9, atunci aplicând regula de mai sus am obține aparent, rezultate diferite.

**Exemplu:**

$17,(9) = 17\dfrac{9}{9} = 17 + 1 = 18$, iar $18 = 18,(0)$.

Pentru a păstra unicitatea scrierii numerelor raționale ca fracții zecimale, nu vom lua în considerare fracțiile zecimale cu perioada 9, dar vom admite scrierea fracțiilor zecimale finite ca fracții infinite periodice cu perioada 0.

CAPITOLUL 11

# Exerciții și probleme recapitulative

## 1. Algebră

**1.** Cercetați dacă există numere naturale care împărțite la $2n + 2$ să dea restul $2n$ și împărțite la $2n$ să dea restul $2n - 1$, unde $n$ este număr natural nenul.

**2.** a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $1! + 2! + 3! + ... + n!$ este pătrat perfect.
b) Arătați că un produs de 2 numere naturale consecutive nu este pătrat perfect.
c) Arătați că un produs de 3 numere naturale consecutive nu este cub perfect.

**3.** a) Arătați că există 7 numere naturale consecutive neprime.
b) Arătați că există $n$ numere naturale consecutive neprime, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

**4.** Arătați că următoarele numere sunt prime între ele:
a) $3n + 2$ și $4n + 3$, $n \in \mathbb{N}$; b) $k \cdot n + k - 1$ și $(k + 1)n + k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

**5.** a) Arătați că fracția $\dfrac{n+2}{2n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Arătați că fracția $\dfrac{n+k}{2n+2k-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ este ireductibilă.

**6.** Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{n^2+2003} \in \mathbb{Q}$.

**7.** Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2250}$.

**8.** a) Fie $k \in \mathbb{Q}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - kb^2 = 1\}$. Determinați o valoare strict pozitivă a lui $k$ astfel încât pentru orice $x, y \in H$ să avem $xy \in H$.
b) Fie $k \in \mathbb{Q}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - kb^2 = 1\}$. Determinați o valoare strict pozitivă a lui $k$ astfel încât pentru orice $x, y \in H$ să avem $xy \in H$.

**9.** a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c \in \mathbb{Q}$ și $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$.
Demonstrați că $ab + bc + ca \in \mathbb{Q}$.
b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$, $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{Q}$.
Demonstrați că $abc \in \mathbb{Q}$.

**10.** Arătați că $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ nu sunt numere raționale.

**11.** Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^3 + b^3 + c^3$ și $a + b + c$ se divid cu 7.
Demonstrați că $abc$ se divide cu 7.

**12.** Fie $x, y \in \mathbb{Q}^*$ și $z = \dfrac{xy}{x+y}$, $x + y \neq 0$. Arătați că $x^2 + y^2 + z^2$ este pătratul unui număr rațional.
*(RMT 2/185)*

# Cuprins