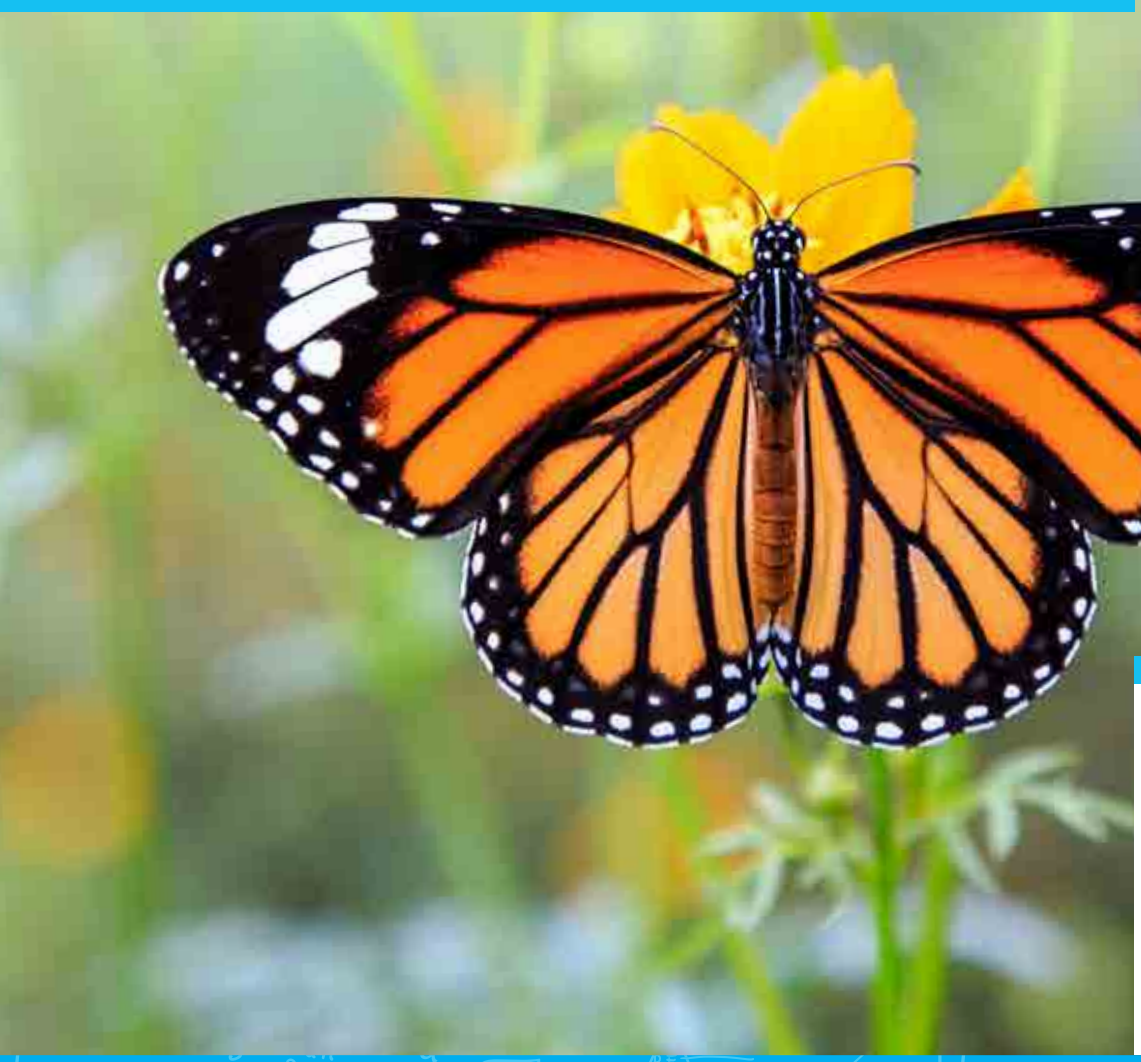
Ministerul Educației Naționale

# Matematică

Manual pentru clasa a VII-a



7

*Acest manual este proprietatea Ministerului Educației Naționale.*

*Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu programa școlară aprobată prin OM nr. 3393 din 28.02.2017.*

**116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

# MATEMATICĂ

## Manual pentru clasa a VII-a

# CUPRINS


*Competențe generale și competențe specifice* . . . . . 4
*Prefață* . . . . . 5
*Ghid de utilizare a manualului* . . . . . 6
*Probleme recapitulative, clasa a VI-a. Test inițial* . . 7

**ALGEBRĂ**
**Capitolul 1 – MULȚIMEA NUMERELOR REALE**

• Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural . . 14
• Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional . . 16
• Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical . . . . . 20
• Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . . . . . 22
• Modulul unui număr real . . . . . 25
• Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări . . . . . 27
• Adunarea și scăderea numerelor reale . . . . . 30
• Înmulțirea și împărțirea numerelor reale . . . . . 33
• Puteri cu exponent număr întreg . . . . . 35
• Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ . . . . . 37
• Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive . . . . . 38
• Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ . . . . . 41
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . . . 42

**Capitolul 2 – ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE**

• Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități . . . . . 45
• Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente. . . . . 47
• Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute . . 51
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . . . 60

**Capitolul 3 – ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR**

• Reprezentarea perechilor de numere și a punctelor geometrice într-un sistem de axe ortogonale . . . . . 63
• Distanța dintre două puncte în plan . . . . . 68
• Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor . . . . . 72
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . . . 78

**GEOMETRIE**
**Capitolul 4 – PATRULATERUL**

• Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex . . . . . 82
• Paralelogramul . . . . . 87
• Linia mijlocie în triunghi. Centrul de greutate al unui triunghi . . . . . 93
• Paralelograme particulare: dreptunghiul . . . . . 97
• Paralelograme particulare: rombul și pătratul . . . 101
• Trapezul: clasificare, proprietăți . . . . . 106
• Perimetre și arii . . . . . 112
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . 118

**Capitolul 5 – CERCUL**

• Coarde și arce în cerc, proprietăți . . . . . 121
• Unghi înscris în cerc . . . . . 126
• Tangente dintr-un punct exterior la un cerc . . 129
• Poligoane regulate înscrise într-un cerc . . . . . 132
• Lungimea cercului și aria discului . . . . . 136
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . 138

**Capitolul 6 – ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR**

• Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante . . . . . 141
• Teorema lui Thales . . . . . 145
• Reciproca teoremei lui Thales . . . . . 149
• Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării . . . . . 153
• Criterii de asemănare a triunghiurilor . . . . . 157
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . 162

**Capitolul 7 – RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC**

• Proiecții ortogonale pe o dreaptă . . . . . 165
• Teorema lui Pitagora . . . . . 169
• Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic . . . . . 173
• Rezolvarea triunghiului dreptunghic . . . . . 177
• *Probleme recapitulative. Teste de evaluare* . . . 181

*Recapitulare finală* . . . . . 184
*Indicații și răspunsuri* . . . . . 191

# COMPETENȚE GENERALE ȘI COMPETENȚE SPECIFICE

**1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui R

1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame

1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date

1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

**2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**

2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora

2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri

2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

**3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**

3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare

3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora

3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme

3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

**4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**

4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)

4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare

4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor

4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea

4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

**5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**

5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor

5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice

5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

**6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**

6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare

6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri

6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor

6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic



# PREFAȚĂ

În ultimii ani, Ministerul Educației Naționale a organizat multe dezbateri și acțiuni oficiale în direcția modernizării predării matematicii, în special la nivelul claselor primare și de gimnaziu. În primul rând, pentru aducerea acesteia la standardele unui învățământ modern, deci adaptat schimbării de paradigmă în dezvoltarea intelectuală a copiilor, dependenți încă din primii ani de viață de lumea informațională și IT. În același timp, a devenit un laitmotiv necesitatea eliminării în predarea matematicii a aspectelor cu grad exagerat de rigurozitate, ce o face adesea neprietenoasă pentru copii, cu consecințe grave pentru asimilarea ulterioară a conținuturilor matematice indispensabile dezvoltării gândirii unui om modern. În al treilea rând, s-a avut în vedere așezarea programelor într-un format care să permită evaluarea elevilor, gradual și în sensul structurii examenelor naționale, astfel încât aceasta să reflecte corect asimilarea competențelor matematice.

Consider ca manualul de față răspunde în totalitate acestor deziderate. Noțiunile sunt treptat introduse, și deci ușor de asimilat, conținuturile și faptele matematice fiind exemplificate în fiecare etapă cu referiri istorice, intuitive și, nu în ultimul rând, cu exerciții și probleme cu date din viață și cu grad de dificultate de la simplu la mediu-dificil.

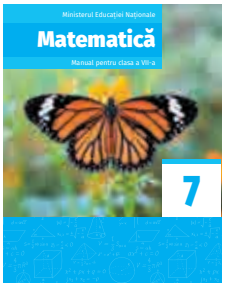
Manualul este astfel alcătuit încât profesorul de matematică să poată acoperi toate conținuturile din programă prin ideile prezentate. Varietatea de exerciții, probleme și exemple din viață, prezentate gradual, face ca manualul să poată fi folosit prin lucrul diferențiat la clasă, de la minimal la excelență.

Grafica propusă face din acest text un manual modern, la standarde europene.

Sperăm ca demersul nostru să aibă succes ca etapă în educația matematică a tinerilor.

# GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI

MANUALUL CUPRINDE
*varianta tipărită și varianta digitală*




*Simboluri folosite*
*în varianta digitală*

**Rezolvă**
Se accesează AMII-urile interactive

**Privește**
Se accesează AMII-urile statice

**Vizionează**
Se accesează AMII-urile animate

Manualul este structurat în două părți: ALGEBRĂ, ce conține capitolele *Mulțimea numerelor reale; Ecuații și sisteme de ecuații liniare; Elemente de organizare a datelor,* respectiv GEOMETRIE, ce conție capitolele *Patrulaterul; Cercul; Asemănarea triunghiurilor; Relații metrice în triunghiul dreptunghic.* Fiecare capitol conține lecții care păstrează, în general, titlurile existente la „Conținuturi" în programa școlară. O lecție se poate întinde pe una sau mai multe ore, dând posibilitatea profesorului să-și adapteze planificarea materiei în funcție de posibilitățile psiho-intelectuale ale elevilor.

Conținuturile noi, specifice programei școlare, sunt prezentate în lecții la rubrica SĂ ÎNVĂȚĂM!. Această rubrică este precedată de rubrica NE AMINTIM! și de probleme rezolvate care sugerează introducerea noțiunilor noi. Se atrage atenția asupra unor noțiuni sau situații prin rubrici precum ATENȚIE, IMPORTANT sau OBSERVAȚII. În cazul în care conținutul ce trebuie prezentat se poate intui prin prezentarea și analiza unor exemple, acestea sunt prezentate și comentate la rubrica DESCOPERIȚI

Fiecare rubrică este continuată cu EXERSĂM ÎMPREUNĂ. Aici sunt prezentate exerciții rezolvate, comentate, exemple și contraexemple.

Rubrica EXERSAȚI conține, în general, probleme asemănătoare cu cele rezolvate. Dacă nu avem exemple rezolvate pentru unele tipuri de probleme propuse, atunci acestea au prezentate la finalul cărții rezolvarea completă sau indicații pentru rezolvare. Un set de lecții cu conținut legat noțional se finalizează cu un set de probleme propuse și teste de evaluare. Testele sunt grilă sau cu itemi deschiși, au la final răspunsurile, astfel încât elevii să poată verifica corectitudinea rezultatelor obținute și au punctaj pe fiecare problemă pentru a fi posibilă și autoevaluarea.

Noțiunile matematice sunt însoțite adesea de rubrica ȘTIAȚI CĂ...?, aceasta aducând în atenția elevilor informații și din istoria matematicii. ACTIVITATE PRACTICĂ și PORTOFOLIU, prin care invităm elevii să pregătească diverse teme, au rolul de a-i provoca să descopere și latura aplicativă a matematicii, frumusețea acesteia și de a-i atrage spre studiu.

# ALGEBRĂ

**1.** Singurul număr natural prim și par este ..... .

**2.** Descompus în factori primi, numărul 24 este egal cu ..... .

**3.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 6 și 15 este egal cu ..... .

**4.** Numărul 7 se scrie ca o sumă de numere prime astfel: 7 = ... + ...

**5.** Mulțimea multiplilor naturali ai lui 15, mai mici decât 55, este {.....}.

**6.** Numărul divizorilor naturali ai lui 24 este egal cu:
a) 8; b) 6; c) 7; d) 9.

**7.** Suma divizorilor naturali proprii ai numărului 45 este egală cu:
a) 78; b) 32; c) 46; d) 77.

**8.** Cel mai mic număr natural de trei cifre care are exact 3 divizori este:
a) 100; b) 101; c) 121; d) 102.

**9.** Calculați:
a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$;
b) $4 + 8 + 12 + \ldots + 136$;
c) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5$;
d) $8^9 : 4^7 : 16^3$.

**10.** Se consideră mulțimile: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
a) Reprezentați prin diagrame cele trei mulțimi.
b) Aflați: $A \cup B \cup C$; $B - C$; $A \cap B \cap C$; $C \cap \mathbb{N}$; $(B \cup C) - A$.

**11.** Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ai numerelor:
a) 36 și 72;
b) 48 și 216;
c) 144, 216 și 324.

**12.** Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{32x} \vdots 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{10x} \vdots 5\}$. Scrieți mulțimile, prin enumerarea elementelor și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

**13.** Aflați cel mai mic număr natural $x$, respectiv $y$, pentru care numerele $48 \cdot x$ și $144 \cdot y$ sunt pătrate perfecte.

**14.** Aflați cel mai mic număr natural cu proprietatea că, dacă împărțim 437 și 520 la acest număr, obținem resturile 12 și, respectiv, 10.

**15.** Aflați toate numerele naturale de trei cifre care împărțite la 85, 51, 34 dau, de fiecare dată, restul 23.

**16.** Raportul numerelor 54 și 18 este ..... .

**17.** Lungimea unui gard este de 10 m și înălțimea de 2 m. Raportul dintre lungimea și înălțimea gardului este ..... .

**18.** Într-o urnă sunt 12 bile negre și 18 bile albe. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră este ..... .

**19.** Pe o hartă, 1 cm reprezintă 2 km în teren. Scara hărții este ..... .

**20.** Încercuiți litera A (adevărat) sau litera F (fals) pentru fiecare dintre propozițiile de mai jos:
a) 20% din 250 este egal cu 50. A F
b) 50% din 1800 este egal cu 180. A F

**21.** Care dintre următoarele rapoarte formează cu raportul $\frac{3}{5}$ o proporție?
a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{6}{9}$; c) $\frac{9}{15}$; d) $\frac{12}{21}$.

**22.** Fie $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. Valoarea raportului $\frac{a}{a+4b}$ este:
a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{2}{7}$; c) $\frac{2}{13}$; d) $\frac{2}{3}$.

**23.** Aflați numărul $x$ din proporțiile de mai jos și asociați fiecărui rezultat din coloana A un rând din coloana B.

| A | B |
|---|---|
| $\frac{x}{10} = \frac{7}{5}$ | $x = 10$ |
| $\frac{2x}{15} = \frac{4}{5}$ | $x = 14$ |
| $\frac{x-8}{x} = \frac{1}{5}$ | $x = 6$ |

**24.** Stabiliți dacă numerele 2, 3, 8, 12 pot forma o proporție. Dacă da, atunci scrieți o proporție și specificați mezii și extremii.

**25.** O lucrare poate fi terminată de 8 muncitori în 15 zile. După 3 zile de lucru, o parte dintre muncitori pleacă și lucrarea se termină în 16 zile. Câți muncitori pleacă?

**26.** Cimentul produs într-o zi de o fabrică a fost ambalat în 240 de saci de câte 30 kg fiecare. Dacă sacii ar fi avut 50 kg fiecare, câți saci ar fi fost necesari?



**27.** Mircea cheltuie o sumă de bani astfel: în prima zi cheltuie 30% din sumă, a doua zi cheltuie 70% din rest, iar a treia zi cheltuie ultimii 21 lei. Aflați suma inițială de bani.

**28.** Un palton costă 400 lei. Aflați prețul paltonului, după o reducere cu 10% urmată de o scumpire cu 10%.

**29.** Determinați $x$ din proporția $\frac{24x}{A} = \frac{5}{B}$, unde $A = 2^{n+1} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{2n+1} + 6^{n+1} \cdot 25^n$ și $B = 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{2n} + 75^n \cdot 2^{n+3}$.

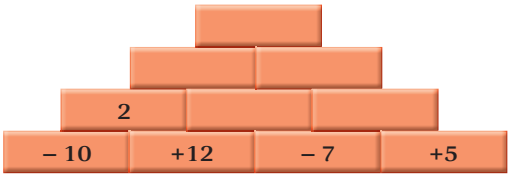
**30.** Aflați $x$ pentru care

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} - 0,(4) : \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)^0 + 3^4} = \frac{x}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)}.$$

**31.** Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x < 1\}$ sunt ..... .

**32.** Divizorii întregi ai numărului 6 sunt ..... .

**33.** Completați piramida, știind că fiecare număr întreg este egal cu suma numerelor întregi ce se găsesc în cele două căsuțe de sub căsuța numărului:




**34.** Soluția întreagă a ecuației $8 - 3x = 2$ este ..... .

**35.** Ordinea crescătoare a numerelor: $a = |-5|$; $b = (-1)^9$; $c = (-6)^0$; $d = -2^2$; $e = (-2)^2$ este ..... .

**36.** Suma divizorilor întregi ai numărului 24 este ..... .

**37.** Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 5\}$ sunt ..... .

**38.** Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul din următoarele numere, acesta să fie număr întreg negativ?
$a = (-1)^5[3 - (-8)]$;
$d = (-1)^3 + (-2)^2 - (-3)^1 - (-4)^0$;
$b = (-2)(-5) + (-7)(3 - 4)$;
$c = 2 - (-3) + (-5) - (-6 + 4)(-6 - 4)$.

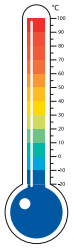
**39.** Calculați:
a) $(-12) + (-15)$; b) $(-15) - (-13)$;
c) $(-14) \cdot (-5)$; d) $(-36):(-18) \cdot 2$;
e) $(+21) - (+45)$; f) $(+8) - (-7)$;
g) $(+12) \cdot (-21)$; h) $|-2| + |+8| - |-3 + 5|$;
i) $(-13) + (-14)$; j) $(-104) - (+56)$;
k) $(-14) \cdot (+41)$; l) $|5 - 2^3| - |3^2 - 1| + |(-1)^5|$.

**40.** Calculați:
a) $-2 \cdot \{-3 - (+5) - 3 \cdot (-7) \cdot [5 \cdot (-12) - (12) \cdot (-5)]\}$;
b) $7 + \{-2 - [16 - (-12 + 13) + 11] - (-1)\}$;

c) $[2^0 + (-3)]^2 \cdot (-4 + 6)^5 \cdot (8 - 10)^6 - 2^{10} \cdot (-1 + 3)^3$;
d) $[(-2 + 5)^4 \cdot 3^6] : 3^3 : (-7 + 4)^4 + (-3)^3$;
e) $(-10)^{10} : (-10)^9 \cdot (-9)^8 : (-9)^7 \cdot (-7)^6 : (-7)^5 \cdot (-5)^4 : : (-5)^3 \cdot (-3)^2 : (-3)$;
f) $(-3^{333} + |5^{222} - 3^{333}|) : (-125)^{74}$.

**41.** Iulius Cezar s-a născut în anul 100 î.H și a murit în anul 44 î.H. Câți ani a trăit?

**42.** Temperatura medie a aerului în ziua de 27 noiembrie 2018 a fost de $-10°C$. A doua zi temperatura a urcat cu $2°C$, a treia zi a mai urcat cu $5°C$, a patra zi a coborât cu $6°C$, iar a cincea zi a mai coborât cu $4°C$. Ce temperatură era la 30 noiembrie 2018? Dar la 1 decembrie 2018?



**43.** În tabelul de mai jos sunt notate temperaturile înregistrate în cursul unei săptămâni a lunii februarie:

| Ziua | L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temp. | −8°C | −10°C | −5°C | 3°C | 4°C | 4°C | 5°C |

a) Aflați diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatură, dintre cele înregistrate în tabel.
b) Calculați media temperaturilor înregistrate în tabelul dat.

**44.** Determinați mulțimile:
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{x-1} \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x-2}{x+2} \in \mathbb{Z}\}$.

**45.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $|x + 5| = 7$;
b) $|x - 5| = -4$;
c) $(x - 2)(x + 7) = 0$.

**46.** Scris ca fracție ordinară ireductibilă, numărul 3,96 este egal cu ..... .

**47.** Scris ca fracție ordinară ireductibilă, numărul 3,(96) este egal cu ..... .

**48.** Scris ca fracție ordinară ireductibilă, numărul 3,9(6) este egal cu ..... .

**49.** Dintre numerele 2,(43) și 2,43, mai mare este ..... .

**50.** 25% din 75% din 25,6 este egal cu:
a) $4\frac{1}{5}$; b) 4; c) $4\frac{2}{5}$; d) $4\frac{4}{5}$.

**51.** Calculați:
a) $(\frac{2}{7} + \frac{3}{5}) - (\frac{1}{7} + \frac{2}{5}) + \frac{23}{35}$;
b) $4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{6} - 2\frac{33}{36}$;
c) $\frac{12}{45} \cdot \frac{30}{56} \cdot \frac{98}{21} \cdot 3$;
d) $3\frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{9}{24} - \frac{2}{5}$;
e) $\frac{7}{15} : (\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3})$;
f) $(2 + 3 \cdot \frac{1}{12}) : 2\frac{1}{4}$;
g) $[2\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot 1\frac{5}{6})] : [(\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3}) + \frac{13}{36}]$.

**52.** Determinați cifra $a$ în fiecare dintre cazurile:
a) $\frac{19}{3} = 6,\overline{(a)}$;
b) $\frac{129}{4} = 3\overline{a,a}5$;
c) $\frac{25}{6} = 4,\overline{1(a)}$.

**53.** Marius parcurge patru cincimi din drumul de acasă spre școală cu bicicleta și restul de 0,25 km pe jos. Câți kilometri parcurge Marius cu bicicleta? Ce lungime are drumul casă–școală ?

**54.** Ionel merge la supermarket și cumpără 3 kg de cartofi la 1,25 lei/kg, 0,5 kg de ceapă la 1,60 lei/kg, 1,5 kg de morcovi la 1,80 lei/kg, 3 pâini la 0,90 lei bucata, 1 sticlă cu suc la 4,50 lei/sticla, 2 bidoane cu lapte la 3,75 lei/bidon și 10 ouă la 0,80 lei/bucata. La casa de marcat el avea o bancnotă de 100 lei. Cu ce rest se întoarce acasă Ionel?

**55.** Media aritmetică a trei numere este 3,25. Media aritmetică a primelor două este 3,375, iar al doilea este de 2 ori mai mic decât primul. Determinați cele trei numere.

**56.** Cei 11 jucători ai unei echipe de fotbal au următoarele înălțimi: doi au câte 1,90 m, unul are 1,88 m, doi au câte 1,86 m, doi au câte 1,80 m, trei au câte 1,74 m și unul are 1,69 m. Care este înălțimea medie a jucătorilor?

**57.** Comparați numerele:
$a = [(2,5 + 1,5 - 1,75) : 5 + 0,55]^5$ și
$b = (2,(3) + 3,5) : 0,58(3) - [2,(3) : 0,(3) - 6,3 + 2,3 : (5,1)^0]^2$.

**58.** Rezolvați următoarele ecuații, în mulțimea numerelor raționale:

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{2+x}{2} = \frac{5}{6}$; b) $x - \frac{2x+1}{2} = \frac{5}{6}$;

c) $\frac{2}{3} \cdot (2x + 3) - \frac{3}{4} \cdot (x - 2) = \frac{x-3}{6} + 1$;

d) $1,125x - 1 = [0,(3) \cdot (10 - 0,25) - 3,4] : (0,8 - 2)$.

**59.** Simplificați fracțiile, până când obțineți o fracție ireductibilă:

a) $\frac{(5^5)^9}{5^{47}}$; b) $\frac{9^{15}}{27^{10}}$; c) $\frac{2^{65} - 2^{63}}{2^{66} + 2^{67}}$.

**60.** Determinați valorile întregi ale lui $n$ pentru care avem:

a) $12 \le 5n \le 21$; b) $-16 \le 3n \le -8$;

c) $\frac{3}{2} < \frac{n}{3} < \frac{13}{5}$; d) $-\frac{7}{4} < \frac{n}{3} < -\frac{5}{6}$;

e) $\frac{2}{5} < \frac{2n+3}{-15} < \frac{4}{3}$.

# GEOMETRIE

## TEST DE AUTOEVALUARE

*– 1p pentru fiecare răspuns corect, 1 p din oficiu*

**1.** Dacă semidreptele (*OA*, (*OC* și respectiv (*OB*, (*OD* sunt perechi de semidrepte opuse, atunci unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt ..... .

**2.** Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu .....°.

**3.** Suma măsurilor a două unghiuri suplementare este egală cu ..... °.

**4.** Suma măsurilor a două unghiuri complementare este egală cu ..... °.

**5.** Două drepte care nu au puncte comune se numesc ..... ..... .

**6.** Dreapta perpendiculară pe un segment, ridicată prin mijlocul acestuia, se numește ... .

**7.** Două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri ..... congruente, sau unghiuri ..... congruente, sau unghiuri ..... congruente.

**8.** Triunghiul cu un unghi obtuz se numește ..... .

**9.** Teorema lui Pitagora este: ..... .

## PROBLEME RECAPITULATIVE

**1.** Complementul unghiului cu măsura de 36° are măsura egală cu .....°.

**2.** Suplementul unghiului cu măsura de 136°are măsura egală cu .....°.

**3.** Complementul suplementului unghiului cu măsura de 125° are măsura egală cu .....°.

**4.** Suplementul complementului unghiului cu măsura de 42° are măsura egală cu .....°.

**5.** Unghiul congruent cu suplementul său are măsura egală cu .....°.

**6.** Unghiul congruent cu complementul său are măsura egală cu .....°.

**7.** Fie punctele coliniare *M* , *N* și *P*, în această ordine, astfel încât *MN* = 8 cm și *MP* = 18 cm. Atunci *NP* = ..... cm.

**8.** Fie punctul *M* mijlocul segmentului *AB*. Dacă *MB* = 10 cm, atunci lungimea segmentului *AB* este egală cu ..... cm.

**9.** Punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare, în această ordine, astfel încât *AB* =14 cm și *AC* = 26 cm.

Fie punctul $M$ mijlocul segmentului $AB$ și $N$ mijlocul segmentului $BC$. Lungimea segmentului $MN$ este egală cu ..... cm.

**10.** Perimetrul unui triunghi isoscel este de 33 cm, iar lungimea bazei triunghiului este de 13 cm. Lungimea uneia din laturile congruente este de:
a) 20 cm; b) 43 cm; c) 6,5 cm; d) 10 cm.

**11.** Suplementul unghiului cu măsura de 42° are măsura egală cu:
a) 48°; b) 142°; c) 138°; d) 148°.

**12.** Dacă două unghiuri sunt adiacente complementare, atunci unghiul format de bisectoarele lor are măsura de:
a) 45°; b) 90°; c) 180°; d) 135°.

**13.** Două unghiuri adiacente au măsurile de 120° și respectiv 90°. Unghiul format de bisectoarele lor are măsura de:
a) 150°; b) 120°; c) 105°; d) 135°.

**14.** Măsura unui unghi este cu 45° mai mică decât măsura suplementului său. Atunci măsura unghiului dat este egală cu:
a) 45°30'; b) 67°30'; c) 112°30'; d) 135°.

**15.** Folosind notații care descriu reprezentările, desenați:
a) două drepte concurente în $A$, $a \cap b = \{A\}$;
b) două drepte paralele, $d_1 \parallel d_2$;
c) un unghi ascuțit $\sphericalangle COD$;
d) un unghi obtuz $\sphericalangle MNP$;
e) un unghi drept $\sphericalangle AOB$;
f) un segment $AB$ cu lungimea de 8,4 cm și $M$ mijlocul segmentului;
g) un unghi $AOB$ cu măsura de 64° și bisectoarea sa ($OC$;

**16.** $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ sunt unghiuri formate în jurul unui punct. Aflați măsurile celor trei unghiuri, știind că măsura $\sphericalangle BOC$ este de două ori mai mare decât măsura $\sphericalangle AOB$, iar măsura $\sphericalangle COA$ este de trei ori mai mare decât măsura $\sphericalangle AOB$. Desenați cele trei unghiuri și bisectoarele lor.

**17.** În $\Delta ABC$, dreptunghic în $A$, se știe că măsura unghiului $C$ este de 30° și $BC = 24$ cm. Dacă $D$ este mijlocul laturii $BC$, aflați:
a) lungimea laturii $AB$;
b) lungimea medianei $AD$;
c) perimetrul $\Delta ADB$.

**18.** Desenați două unghiuri $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, cu măsurile de 50° și 60° (analizați două cazuri). Aflați măsura unghiului dintre bisectoarele celor două unghiuri.

**19.** Fie unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COB$ adiacente complementare, cu măsura unghiului $\sphericalangle AOC$ de 60°, și fie ($OD$ și ($OE$ semidrepte opuse semidreptelor ($OB$ și, respectiv, ($OC$.
a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle BOE$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle AOE$.
b) Calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOE$.

**20.** Pe prelungirea laturii $BC$ a triunghiului isoscel $ABC$ ($AB = AC$) se consideră punctele $E$ și $F$ astfel încât $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle FAC$. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, demonstrați că:
a) $\Delta ABE \equiv \Delta ACF$;
b) $\Delta ADE \equiv \Delta ADF$;
c) $d(D, AE) = d(D, AF)$.

## SUBIECTUL I
**Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate** **(30 puncte)**

**1.** Rezultatul corect al calculului $[-2-(+5)+(-3)-(-10)]\cdot(-25)$ este .....

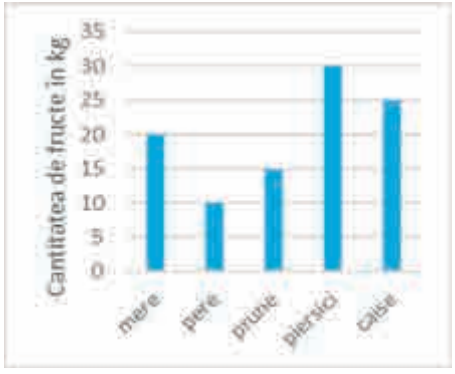
**2.** Rezultatul corect al calculului $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\cdot 1\frac{5}{7}$ este .....

**3.** Dacă 4 kg de roșii costă 10 lei, atunci 6 kg de roșii costă .....

**4.** Dacă $\frac{5}{2x}=\frac{15}{6}$, atunci x este egal cu .....

**5.** Suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este egală cu .....°.

**6.** Diagrama alăturată reprezintă cantitățile de fructe dintr-un magazin. Conform diagramei, procentul reprezentat de cantitatea de prune din cantitatea totală este.....




## SUBIECTUL al II-lea
**Scrieți rezolvările complete** **(30 puncte)**

**1.** Desenați un triunghi dreptunghic cu o catetă de 3 cm și ipotenuza de 5 cm. Explicați etapele de raționament făcute!

**2.** Prețul unei cărți a fost redus cu 15% și a devenit 21,25 lei. Aflați prețul inițial al cărții.

**3.** Într-o urnă sunt 5 bile albe, 4 bile negre și 9 bile roșii. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare o bilă, aceasta să *nu* fie neagră?

**4.** Mama are 24 de bomboane pe care le împarte celor trei copii, în părți direct proporționale cu numerele 3, 4, 5. Câte bomboane primește fiecare copil?

**5.** Calculați: $[0,(6):1\frac{1}{3}-2\frac{1}{4}]:(\frac{10}{36}-\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3})-\frac{1}{\frac{2}{3}}$.

**6.** Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația: $|2x-5|=4,5$.

## SUBIECTUL al III-lea
**Scrieți rezolvările complete** **(30 puncte)**

**1.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$, și mediana $AM$.
a. Arătați că $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MCA$.
b. Dacă unghiul $B$ are măsura de 60°, arătați că triunghiul $\Delta ABM$ este echilateral.
c. Dacă lungimile catetelor triunghiului sunt egale cu 6 cm și 8 cm, aflați perimetrul triunghiului.

**2.** Fie unghiul $\sphericalangle XOY$ și ($OZ$ bisectoarea lui. Din punctul $A$ de pe ($OZ$ se duc perpendicularele $AB$ și $AC$ pe ($OX$ și ($OY$. Arătați că $\Delta AOB \equiv \Delta AOC$ și că ($AO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

*Barem: I. 6 x 5 p = 30 p; II. 6 x 5 p = 30 p; III. 2 x 15 p = 30 p. Oficiu: 10 p.*

# ALGEBRĂ






**Matematica este limba cu care Dumnezeu a scris universul.**

**Galileo Galilei**
**1564–1642**

# RĂDĂCINA PĂTRATĂ A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR NATURAL

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Vrei să postezi pe facebook o poză pătrată, cu dimensiunea de 3600 pixeli, într-un spațiu cu dimensiunile de 70×75 pixeli. Verifică dacă poza încape în acest spațiu.

*Indicație.* Dacă poza are forma de pătrat cu aria de 3600 pixeli, știind că aria pătratului este $A = a^2$, adică $3600 = 60^2$, se obține că latura pătratului este de 60 pixeli, deci încape în spațiul ales.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Copiați în caiete tabelul următor și completați-l după model:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **$a^2$** | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | | | | | |
| **a** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| **$a^2$** | | | | | | | | **324** | | |
| **a** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| **$a^2$** | | | | | | | | | | |
| **a** | **35** | **40** | **45** | **50** | **60** | **70** | **75** | **80** | **90** | **100** |
| **$a^2$** | | | | | **3600** | | | | | |

➢ După completarea tabelului, poți spune:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $324 = 18^2$ | $225 = 15^2$ | $625 = 25^2$ | $3600 = 60^2$ | $841 = 29^2$ |

**DEFINIȚIE**

*Rădăcina pătrată* a unui număr $a$, $a \geq 0$, este numărul $x$, $x \geq 0$ cu proprietatea că $x^2 = a$; cu alte cuvinte, acel număr mai mare sau egal cu 0 care, prin ridicare la puterea a doua, are ca rezultat numărul $a$.

Semnul $\sqrt{}$ se numește *radical*. În cazul rădăcinii pătrate, acesta este radical de ordinul 2. Există și radicali de ordin superior lui 2.

Notație: $\sqrt{a} = x$. Citim: "rădăcina pătrată a numărului $a$ este egală cu $x$" sau „radical din $a$ este egal cu $x$".

**OBSERVAȚIE**

Dacă privim rădăcina pătrată *în oglindă* cu ridicarea la pătrat a unui număr, tabelul anterior devine: $\sqrt{324} = 18$; $\sqrt{225} = 15$; $\sqrt{625} = 25$; $\sqrt{3600} = 60$; $\sqrt{841} = 29$.

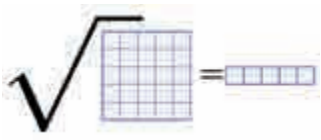
**IMPORTANT**

- Rădăcina pătrată se poate calcula numai din numere pozitive.
- $a \geq 0$ și $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$ și $x \geq 0$.
- $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$; $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$; $\sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$; $\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$; $\sqrt{784} = \sqrt{28^2} = 28$; $\sqrt{26^2} = 26$; $\sqrt{56^2} = 56$; $\sqrt{9^4} = \sqrt{(9^2)^2} = 9^2 = 81$; $\sqrt{7^{14}} = \sqrt{(7^7)^2} = 7^7$.

➢ Pentru ca $\sqrt{x-5}$ să existe, trebuie ca $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.



## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ și $\sqrt{a:b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ $\sqrt{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 = 6$; $\sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$; $\sqrt{7^2 \cdot 5^2} = 7 \cdot 5 = 35$; $\sqrt{6^4 \cdot 9} = \sqrt{6^4} \cdot \sqrt{9} = 6^2 \cdot 3$; $\sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$; $\sqrt{36 \cdot 25} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$; $\sqrt{144 \cdot 121} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{121} = 12 \cdot 11 = 132$; $\sqrt{5^4 \cdot 4 \cdot 3^2} = \sqrt{5^4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3^2} = 5^2 \cdot 2 \cdot 3 = 150$.

➢ $\sqrt{441:49} = \sqrt{441} : \sqrt{49} = 21:7 = 3$; $\sqrt{6^8:3^8} = \sqrt{6^8} : \sqrt{3^8} = 6^4:3^4 = 2^4$; $\sqrt{9^7:3^8} = \sqrt{(3^2)^7} : \sqrt{3^8} = \sqrt{3^{14}}:3^4 = 3^7:3^4 = 3^3$.

## ȘTIAȚI CĂ...?

➢ Rădăcina pătrată era cunoscută încă din antichitate. Babilonienii aveau tabele cu rădăcinile pătrate ale numerelor.

➢ În Evul Mediu s-a dezvoltat mult noțiunea de rădăcină pătrată. Hindușii cunoșteau faptul că *nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ.*



## EXERSAȚI

**1.** Copiați tabelul în caiete și completați-l:

| $a$ | 256 | 361 | 484 | | $225 \cdot 361$ | $10000:625$ | | $15^{18} \cdot 7^{22}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ | | | | 37 | | | $7^5 \cdot 3^3$ | |
| $a$ | 729 | 841 | 900 | | $576 \cdot 144$ | $784:49$ | | $21^{16} \cdot 4^8$ |
| $\sqrt{a}$ | | | | 17 | | | $8^3 \cdot 6^9$ | |

**2.** Scrieți pătratele perfecte de două cifre și calculați rădăcina pătrată din numerele găsite.

**3.** Calculați radicalii, apoi efectuați calculele: $\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16}$; $\sqrt{441} - \sqrt{144} - \sqrt{9}$; $\sqrt{2500} - \sqrt{625} : \sqrt{25}$; $\frac{\sqrt{576} + \sqrt{676}}{10}$; $\frac{\sqrt{841} - \sqrt{81}}{\sqrt{4}}$.

**4.** a) Calculați: $11^2$, $111^2$, $1111^2$ și analizați rezultatele. Calculați apoi: $\sqrt{12321}$; $\sqrt{123454321}$; $\sqrt{12345678987654321}$.
b) Calculați: $101^2$, $1001^2$ și analizați rezultatele. Folosind rezultatele, calculați $\sqrt{100020001}$.

**5.** Determinați numerele naturale $a$ pentru care:
a) $\sqrt{a} = 52$; b) $\sqrt{a} = 45$; c) $\sqrt{a} = 65$; d) $\sqrt{a} = 43$.

**6.** Determinați numerele naturale $a$ pentru care:
a) $\sqrt{\overline{6a6}} \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{\overline{7a4}} \in \mathbb{N}$;
c) $\sqrt{\overline{5a6}} \in \mathbb{N}$; d) $\sqrt{\overline{7a9}} \in \mathbb{N}$.

**7.** Aflați valorile naturale ale lui $x$ pentru care există radicalii:
a) $\sqrt{x-5}$; b) $\sqrt{x+8}$;
c) $\sqrt{2x-8}$; d) $\sqrt{26-5x}$.

**8.** Aflați valorile naturale ale lui $x$ și $y$ pentru care $\sqrt{\overline{xyx}} = \overline{xx}$.

**9.** Determinați numerele naturale $a$ și $b$ pentru care: a) $\sqrt{\overline{ab}} = 6$; b) $\sqrt{\overline{1ab}} = 13$;
c) $\sqrt{\overline{62ab}} = 79$; d) $\sqrt{\overline{1a76b}} = 137$.

# ESTIMAREA RĂDĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

**NE AMINTIM!**

✓ Am aflat cum se calculează rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect.

✓ Am aflat că pentru $\sqrt{a} = x$ avem obligatoriu $a \geq 0$ și $x \geq 0$.

✓ Cunoaștem că:

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$



**Atenție la cele două noțiuni: pătrat perfect, rădăcină pătrată!**

Verificați dacă ați înțeles cele două noțiuni, completând cu adevărat sau fals afirmațiile următoare:

- Rădăcina pătrată dintr-un pătrat perfect este un număr natural.
- Rădăcina pătrată a oricărui pătrat perfect este număr natural.
- Orice număr natural este rădăcină pătrată a unui număr natural.
- Este posibil ca rădăcina pătrată a unui număr să fie egală cu numărul respectiv.

Observăm că: $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$; $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = |-7|$.

**ȘTIAȚI CĂ...?**

Extragerea rădăcinii apare descrisă în *Matematica în nouă cărți* (283 î.H.), apoi la Leonardo din Pisa (Fibonacci), în 1220, în *Practica geometricae*.

Primul care a utilizat un simbol pentru radical a fost matematicianul Luca Paccioli (1487). El reda radicalul prin R (radix – radice) și scria R2, R3, R4 pentru radicalii de ordinul 2, 3, respectiv 4.

Simbolul actual pentru radical a apărut în 1525 în lucrările lui Christoff Rudolff, unde era notat cu $\sqrt{}$. Totul a pornit de la un pătrat de arie dată (de exemplu 2 m$^2$) căruia grecii antici au vrut să-i afle lungimea laturii.

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

Oricare ar fi numărul rațional $a$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ $\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$;
$\sqrt{91^2} = |91| = 91$; $\sqrt{(-15)^2} = \sqrt{225} =$
$= 15$; $\sqrt{(-23)^2} = |-23| = 23$; $\sqrt{25a^2} = 5|a|$; $\sqrt{36a^2b^4} = 6|a| \cdot |b^2| = 6b^2|a|$.

➢ Dacă $x > 0$, calculați: $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{49x^2} - 7x + 1$; $\sqrt{81x^2} - 9(x-4) - 36$.

*Rezolvare.* $\sqrt{x^2} = |x| = x$; $\sqrt{49x^2} - 7x + 1 = 7|x| - 7x + 1 =$
$= 7x - 7x + 1 = 1$; $\sqrt{81x^2} - 9(x-4) - 36 = 9x - 9x + 36 - 36 = 0$.

➢ Dacă $x < 0$, aflați: $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{9x^2} + 3x$; $\sqrt{25x^2} + 5(x-3) + 12$.

*Rezolvare.* $\sqrt{x^2} = |x| = -x$; $\sqrt{9x^2} + 3x = 3|x| + 3x = -3x + 3x = 0$;
$\sqrt{25x^2} + 5(x-3) + 12 = -5x + 5x - 15 + 12 = -3$.

➢ Verificați dacă: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$, $\sqrt{10^2 - 6^2} = 10 - 6$.

*Rezolvare.* $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4$;
$\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \neq 10 - 6$.

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

În general, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$; $\sqrt{a^2 - b^2} \neq \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$.
Relațiile sunt adevărate cu câteva excepții. Găsiți-le!

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Calculați:
$\sqrt{10^2-8^2}$; $\sqrt{25^2-20^2}$; $\sqrt{12^2+9^2}$; $\sqrt{25^2+10^2}$; $\sqrt{15^2-9^2}$.

*Rezolvare.* Facem calculele sub radical, apoi calculăm radicalul.

➢ Calculați: $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}$; $\sqrt{\frac{121}{289}}$; $\sqrt{\frac{169}{324}}$; $\sqrt{\left(-\frac{3}{11}\right)^2}$; $\sqrt{\frac{5^4}{7^6}}$; $\sqrt{\left(-\frac{11}{12}\right)^4}$.

*Rezolvare.* $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$; $\sqrt{\left(-\frac{3}{11}\right)^2}=\left|-\frac{3}{11}\right|=\frac{3}{11}$.

➢ Calculați: $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{0,0064}$, $\sqrt{9,61}$.

*Rezolvare.* $\sqrt{1,44}=\sqrt{\frac{144}{100}}=\frac{12}{10}=1,2$; $\sqrt{0,0064}=\sqrt{\frac{64}{10000}}=\sqrt{\frac{8^2}{100^2}}=$
$=\frac{8}{100}=0,08$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă $0 \le a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

## IMPORTANT

✓ Pentru un *număr rațional exprimat printr-o fracție ordinară*, calculăm radicalul astfel:
$\sqrt{\left(-\frac{13}{16}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{16}\right)^2}=\frac{13}{16}=\left|-\frac{13}{16}\right|$.

✓ Pentru un *număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală*, putem să-l transformăm în fracție ordinară și apoi să calculăm rădăcina pătrată:
$\sqrt{0,01}=\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}=0,1$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

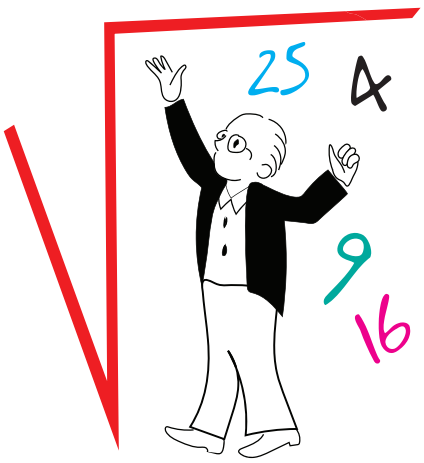
➢ Avem $\sqrt{4}=2$ și $\sqrt{9}=3$.
Cum putem încadra rădăcina pătrată a numerelor dintre 4 și 9 între două numere naturale?

*Rezolvare.* Cum $4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$, atunci $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ și $\sqrt{8}$ sunt cuprinse între numerele naturale 2 și 3.

➢ Încadrați următorii radicali între două numere naturale consecutive (numerele de sub radical nu sunt pătrate perfecte): $\sqrt{13}$, $\sqrt{3724}$, $\sqrt{6125}$, $\sqrt{3143}$.

*Rezolvare.* Numărul 13 se încadrează între două pătrate perfecte consecutive: $9 < 13 < 16$; putem spune că $3 < \sqrt{13} < 4$.

Pentru 3724, împărțim numărul în grupe de câte 2 cifre, de la dreapta spre stânga: $\sqrt{37'24}$. Prima grupă, $37 > 36 = 6^2$, așadar $\sqrt{3724} > \overline{6a}$. Calculăm $61^2 = 3721$ și $62^2 = 3844$, deci $61 < \sqrt{3724} < 62$.




## PORTOFOLIU

➢ Imaginează-te unul dintre matematicienii hinduși care a înțeles că nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ.

Enumeră toate ideile care te-au condus la acest adevăr matematic. Compară cu argumentele colegilor tăi!

➢ Identifică toate pătratele perfecte ce reprezintă anii secolului XX, calculează rădăcinile pătrate ale acestora și organizează informația într-un tabel, asociind tuturor anilor identificați semnificații istorice (poți utiliza internetul sau surse de la biblioteca școlii pentru aceasta!).

## ALGORITMUL DE CALCUL AL RĂDĂCINII PĂTRATE A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Să calculăm $\sqrt{1369}$.

| | |
|---|---|
| 1. Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga. | $\sqrt{13'69}$ |
| 2. Căutăm numărul cel mai mare al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 13 (prima grupă): $3^2 < 13 < 4^2$. Scriem la rezultat 3 și scădem din 13 pe $3^2$; 3 este rezultat parțial. | $\sqrt{13'69}\ \vert\ 3$<br>$9$<br>$4$ |
| 3. Lângă primul rest parțial (4) coborâm următoarea grupă. Sub rezultat trecem dublul rezultatului parțial consemnat până la această etapă (în cazul nostru 3 este rezultatul parțial, deci consemnăm dublul său, 6). | $\sqrt{13'69}\ \vert\ 3$<br>$9\ \vert\ 6$<br>$469$ |
| 4. Verificăm de câte ori se cuprinde 6 (dublul rezultatului parțial) în 46; 46:6 = 7, rest 4. Trecem 7 lângă 6 (de sub rezultat) și calculăm $67 \cdot 7 = 469$. Dacă rezultatul înmulțirii lui 67 cu 7 era mai mare decât 469, încercam o cifră mai mică ($66 \cdot 6$). | $\sqrt{13'69}\ \vert\ 37$<br>$9\ \vert\ 67 \cdot 7 = 469$<br>$469$<br>$469$<br>$0$ |
| 5. Deoarece se obține restul 0, algoritmul se încheie, având rezultatul extragerii rădăcinii pătrate (dintr-un pătrat perfect). | $\sqrt{1369} = 37$ |

**IMPORTANT**

Pentru fracțiile zecimale, diferența în calcularea rădăcinii pătrate este că gruparea cifrelor câte două se face atât de la virgulă spre dreapta, cât și de la virgulă spre stânga.

**ATENȚIE**

Când ajungem în dreptul virgulei de la numărul din care se extrage rădăcina pătrată, trebuie să mutăm virgula la rezultat.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Calculați: $\sqrt{21904}$; $\sqrt{43681}$; $\sqrt{1,1236}$; $\sqrt{0,9801}$.

$\sqrt{2'19'04}\ \vert\ 148$
$1\ \vert\ 24 \cdot 4 = 96$
$119\ \vert\ 288 \cdot 8 = 2304$
$96$
$2304$
$2304$
$0$

$\sqrt{4'36'81}\ \vert\ 209$
$4\ \vert\ 40 \cdot 0 = 0$
$36\ \vert\ 409 \cdot 9 = 3681$
$0$
$3681$
$3681$
$0$

$\sqrt{1,12'36}\ \vert\ 1,06$
$1\ \vert\ 20 \cdot 0 = 0$
$12\ \vert\ 206 \cdot 6 = 1236$
$0$
$1236$
$1236$
$0$

$\sqrt{0,98'01}\ \vert\ 0,99$
$0\ \vert\ 9 \cdot 9 = 81$
$98\ \vert\ 189 \cdot 9 = 1701$
$81$
$1701$
$1701$
$0$

## RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR CARE NU ESTE PĂTRATUL UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Să calculăm $\sqrt{514}$.

| | |
|---|---|
| 1. Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga. | $\sqrt{5'14}$ |
| 2. Procedăm cum am învățat la extragerea rădăcinii pătrate în exemplul anterior. Am obținut restul parțial 30. Cum restul este diferit de 0, algoritmul poate continua (22 este doar un rezultat parțial sau poate fi considerat o aproximare prin lipsă). | $\sqrt{5'14}$ \| 22<br>4 \| $42 \cdot 2 = 84$<br>114<br>84<br>30 |
| 3. Vom continua algoritmul și vom calcula două zecimale. Evidențiem partea zecimală a numărului 514, completând la dreapta virgulei cu zerouri. Fiecare grupă de câte două zerouri la dreapta virgulei va permite obținerea câte unei zecimale a rădăcinii pătrate, deci pentru două zecimale avem nevoie de 2 grupe de câte 2 zerouri. Pe parcursul calculului am obținut $447 \cdot 7 = 3129 > 3000$, calcul care nu convine și calculăm $446 \cdot 6$. Putem continua să calculăm câte zecimale dorim. | $\sqrt{5'14,00'00}$ \| 22,67<br>4 \| $42 \cdot 2 = 84$<br>114 \| ~~$447 \cdot 7 = 3129$~~<br>84 \| $446 \cdot 6 = 2676$<br>3000 \| $4527 \cdot 7 = 31689$<br>2676<br>32400<br>31689<br>711 |
| 4. Am obținut o aproximare prin lipsă la sutimi (pentru aproximare folosim semnul $\simeq$). | $\sqrt{514} \simeq 22,67$ |

➢ Calculați cu aproximare prin lipsă la sutimi: $\sqrt{1,1904}$; $\sqrt{3,681}$.

$\sqrt{1,19'04}$ | 1,09
1 | $20 \cdot 0 = 0$
19 | $209 \cdot 9 = 1881$
0
1904
1881
23

$\sqrt{3,68'10}$ | 1,91
1 | $29 \cdot 9 = 261$
268 | $381 \cdot 1 = 381$
261
710
381
329

**! ATENȚIE**

Dacă numărul de zecimale este impar, pentru ultima grupă se adaugă un 0.

### EXERSAȚI

**1.** Fără a calcula rădăcina pătrată, încadrați următorii radicali între două numere naturale consecutive: $\sqrt{8}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{180}$.

**2.** Calculați rădăcina pătrată a următoarelor numere: 361; 961; 196; 4,41; 10,24; 0,81; 841; 1444; 2116; 2209; 29,16; 0,0529; 75,69; 94,09; 1,1449; 647,1936; 9,006001; 576,4801.

**3.** Calculați: $\sqrt{1,(7)}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{1,36(1)}$; $\sqrt{1,52(1)}$.

**4.** Calculați, cu aproximare prin lipsă:
a) $\sqrt{5,3}$ (la zecimi);
b) $\sqrt{0,097}$ (la sutimi);
c) $\sqrt{12,90045}$ (la miimi).

**5.** Aflați valorile naturale ale lui $n$, pentru care:
a) $57 \leq n^2 \leq 100$; b) $1475 \leq n^2 \leq 1700$;
c) $n^2 \leq 598 \leq (n+1)^2$; d) $n^2 \leq 3746 \leq (n+1)^2$.

**6.** Dacă $x < 0$ și $y > 0$, calculați:
a) $\sqrt{36x^2y^2}$; b) $\sqrt{x^4y^6}$; c) $\sqrt{\frac{64}{25}x^2y^4}$.

# SCOATEREA FACTORILOR DE SUB RADICAL. INTRODUCEREA FACTORILOR SUB RADICAL

## NE AMINTIM!

Descompunerile în factori primi ale numerelor 441, 676, 12 și 72 sunt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 441 | 3 | 676 | 2 |
| 147 | 3 | 338 | 2 |
| 49 | 7 | 169 | 13 |
| 7 | 7 | 13 | 13 |
| 1 | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 72 | 2 | 12 | 2 |
| 36 | 2 | 6 | 2 |
| 18 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | 3 | 1 | |
| 2 | 2 | | |
| 1 | | | |

## IMPORTANT

O metodă de calcul a rădăcinii pătrate este descompunerea în factori. Dacă, după descompunerea numărului în factori primi diferiți, toți factorii au puteri pare, numărul este pătrat perfect și rădăcina sa pătrată este un număr natural.

## ATENȚIE

Pentru $a\sqrt{b}$, $b \geq 0$, dorim să introducem sub radical factorul din față, dar nu știm dacă $a$ este număr pozitiv sau negativ. Analizăm cazurile: dacă $a < 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$ și rezultatul este negativ. Dacă $a \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ și rezultatul este pozitiv.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ a) Calculați $\sqrt{441}$ și $\sqrt{676}$.

b) Exprimați $\sqrt{12}$ și, respectiv, $\sqrt{72}$ ca un produs dintre un număr natural diferit de 1 și un radical.

*Rezolvare.* a) $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2} = 3 \cdot 7 = 21$; observăm că, dintre cei doi factori 3, respectiv dintre cei doi factori 7 din descompunere, scoatem câte unul de sub radical. Procedând în același fel: $\sqrt{676} = \sqrt{2^2 \cdot 13^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{13^2} = 2 \cdot 13 = 26$.

b) În descompunerea lui 12, factorul 3 apare o singură dată. Cum nu are un „factor pereche”, atunci rămâne sub radical, iar $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$. Spunem că *am scos factorul 2 de sub radical* și scriem $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (*între 2 și* $\sqrt{3}$ *avem operația de înmulțire*). $\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 2} = 2\sqrt{18}$ (spunem că *am scos 2 de sub radical*) sau $\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (spunem că *am scos 6 de sub radical*).

➢ Descompuneți în produs de factori primi numerele de sub radical, apoi scoateți factorii de sub radical: $\sqrt{225}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{a^2b^4c}$, $c \geq 0$.

*Rezolvare.* $\sqrt{225} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 5 \cdot 3 = 15$; $\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 5 = 2$; $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$ (*în acest caz am scos factorul 2 de sub radical*); $\sqrt{a^2b^4c} = |a| \cdot b^2\sqrt{c}$ (rezultatul trebuie să fie un număr pozitiv și, cum nu știm ce semn are $a$, rezultatul se exprimă cu ajutorul modulului).

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

- Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$.
- Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, $\sqrt{a^{2n+1} \cdot b} = a^n\sqrt{a \cdot b}$, $n$ număr natural.
- Dacă $b \geq 0$, $\sqrt{a^{2n} \cdot b} = |a^n|\sqrt{b}$, $n$ număr natural.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Introduceți sub radical factorii din fața acestuia: $4\sqrt{5}$; $6\sqrt{14}$; $-5\sqrt{5}$; 42.

*Rezolvare.* $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$; $6\sqrt{14} = \sqrt{6^2 \cdot 14} = \sqrt{504}$; $-5\sqrt{5}$ este negativ și rezultatul trebuie să rămână tot negativ, așadar $-5\sqrt{5} = -\sqrt{5^2 \cdot 5} = -\sqrt{125}$; $42 = \sqrt{42^2} = \sqrt{1764}$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Dacă $a > 0$ și $b \geq 0$, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$.
❖ Spunem că am introdus un factor (număr pozitiv) sub radical, dacă factorul este *"mutat"* sub semnul radical și este ridicat la pătrat.
❖ Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$, $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$.




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Introduceți sub radical factorii din fața acestuia:
a) $a\sqrt{5}$; b) $-a\sqrt{8}$, $a < 0$.
*Rezolvare.*
a) Dacă $a \geq 0$, atunci $a\sqrt{5} = \sqrt{5a^2}$, iar dacă $a < 0$ avem $a\sqrt{5} = -\sqrt{5a^2}$.
b) Cum $a < 0$, avem $-a > 0$, deci $-a\sqrt{8} = \sqrt{8 \cdot (-a)^2} = \sqrt{8a^2}$.

## EXERSAȚI

**1.** Scoateți factori de sub radical:
a. $\sqrt{45}$ b. $\sqrt{18}$ c. $\sqrt{125}$ d. $\sqrt{80}$
e. $\sqrt{300}$ f. $\sqrt{450}$ g. $\sqrt{1008}$ h. $\sqrt{1350}$
i. $\sqrt{294}$ j. $\sqrt{720}$ k. $\sqrt{810}$ l. $\sqrt{250}$
m. $\sqrt{2368}$ n. $\sqrt{3750}$ o. $\sqrt{1323}$ p. $\sqrt{2880}$
q. $\sqrt{3072}$ r. $\sqrt{2268}$

**2.** Scoateți factori de sub radical, dacă $x \geq 0, y \geq 0$, $a \geq 0, b \geq 0$:
a. $\sqrt{450a^7}$ b. $\sqrt{80x^6}$ c. $\sqrt{32x^2y^4}$ d. $\sqrt{25a^2b}$
e. $\sqrt{72x^5y^3}$ f. $\sqrt{5x^6}$

**3.** Introduceți factorii sub radical:
a. $5\sqrt{2}$ b. $3\sqrt{5}$ c. $2\sqrt{3}$ d. $4\sqrt{3}$
e. $3\sqrt{3}$ f. $-2\sqrt{2}$ g. $12\sqrt{2}$ h. $-6\sqrt{7}$
i. $-0,2\sqrt{3}$ j. $1,5\sqrt{2}$ k. $1,(3)\sqrt{21}$ l. $2^2\sqrt{7}$
m. $-9^0\sqrt{23}$ n. $-16\sqrt{6}$ o. $1,4\sqrt{5}$ p. $3^2\sqrt{6}$
r. $-2,(3)\sqrt{3}$ s. $-2,8\sqrt{125}$

**4.** Introduceți factorii sub radical, dacă $x \geq 0, b \leq 0$:
a. $x \cdot b$ b. $x\sqrt{5}$ c. $x^2\sqrt{15}$ d. $5x\sqrt{3x}$
e. $-2x^2\sqrt{5x}$ f. $17xb\sqrt{6b^2}$

**5.** Precizați care afirmație este adevărată și care este falsă:
a. $15\sqrt{2} = 5\sqrt{18}$ b. $\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$
c. $10\sqrt{3} = 2\sqrt{75}$ d. $-4\sqrt{5} = \sqrt{80}$
e. $\sqrt{240x^4} = 4x^2\sqrt{15}$ f. $\sqrt{125x^2} = 5x\sqrt{5}$
g. $-\sqrt{128} = -4\sqrt{6}$ h. $x\sqrt{162} = 9\sqrt{2x^2}$

**6.** Calculați:
a. $\sqrt{25} - 3 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot \sqrt{64}$
b. $\sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot \sqrt{36}$
c. $\sqrt{49} - 4 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot \sqrt{64}$..
d. $\sqrt{225} - 2 \cdot (\sqrt{144} - \sqrt{100})$
e. $\sqrt{121} - 3 \cdot (\sqrt{169} - \sqrt{81})$
f. $\sqrt{196} - 4 \cdot (\sqrt{144} - \sqrt{121})$
g. $\sqrt{169} - 2 \cdot (\sqrt{121} - \sqrt{100})$
h. $\sqrt{16} - 3 \cdot \sqrt{25} + \sqrt{100}$

**7.** Calculați:
a. $\sqrt{121} - 3 \cdot \sqrt{81} + 2 \cdot \sqrt{49}$;
b. $\sqrt{25} \cdot (\sqrt{64} - |\sqrt{4} - \sqrt{16}|) - \sqrt{121}$;
c. $\sqrt{9} \cdot (\sqrt{100} - |\sqrt{16} - \sqrt{25}|)$.

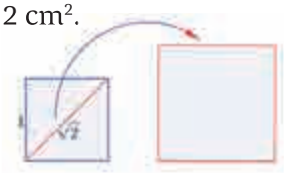
# NUMERE IRAȚIONALE. MULȚIMEA NUMERELOR REALE. INCLUZIUNILE $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

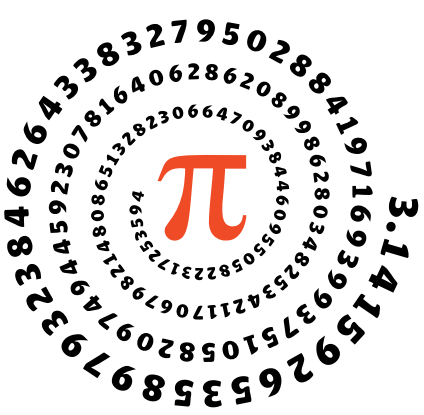
## NE AMINTIM!

Am învățat că numerele raționale pot fi exprimate prin fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule sau prin fracții zecimale periodice (simple sau mixte).

## ȘTIAȚI CĂ...?

Problema calculului laturii pătratului de arie 2 cm² a apărut din antichitate. Într-un Dialog Platonian, Socrates îi arată lui Menon, într-o lungă explicație geometrică, că diagonala unui pătrat cu latura de 1 cm este egală cu latura pătratului de arie 2 cm².




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Alegeți din mulțimea: $A = \{-5,2;\ -4;\ -2,01;\ -1;0;1,8;\ 2;6,(7)\}$ numerele:

a) naturale; b) întregi; c) raționale.

*Rezolvare*: a) Numerele naturale sunt 0 și 2; b) Numerele întregi sunt –4, –1, 0 și 2; c) Toate numerele din mulțime sunt raționale. Ne amintim că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

➢ Fie un pătrat de latură 1 cm; aria lui este de 1 cm². Închipuiți-vă că tragem de colțurile pătratului și obținem un pătrat de arie 2 cm². Ce lungime are latura noului pătrat?

*Rezolvare*: Cum aria pătratului este dată de formula $A = l^2$, obținem că $l = \sqrt{2}$ cm. Să calculăm $\sqrt{2}$.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{2,00'00'00}$ | 1,414… |
| 1 | $24 \cdot 4 = 96$ |
| 100 | $281 \cdot 1 = 281$ |
| 96 | $2824 \cdot 4 = 11296$ |
| 400 | |
| 281 | |
| 11900 | |
| 11296 | |
| 604 | |
| ..... | |

Putem continua extragerea rădăcinii pătrate și vom obține o infinitate de zecimale, dar nu vom obține o fracție periodică:

$\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots..$

Este $\sqrt{2}$ număr rațional?

Presupunem (prin reducere la absurd) că $\sqrt{2}$ este număr rațional. Atunci putem scrie: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0, (a,b) = 1$, $a, b$ numere naturale.

Obținem $b\sqrt{2} = a \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$, adică 2 divide $a$, deci $a = 2x$ (este număr par). Obținem $2b^2 = 4x^2 \Leftrightarrow b^2 = 2x^2$, adică 2 divide și pe $b$. Așadar $a$ și $b$ sunt două numere pare, deci nu sunt prime între ele, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Deci $\sqrt{2}$ nu este rațional.

## OBSERVAȚIE

Numărul $\pi = 3,14159265359\ldots$, care reprezintă raportul dintre lungimea și diametrul unui cerc, este număr irațional. Demonstrația acestui fapt este foarte dificilă; ea a fost dată de către Johann Heinrich Lambert în anul 1767, folosind ideile matematicianului Leonhard Euler.

**IMPORTANT**

✓ Dacă $\sqrt{p}$ este număr irațional și $x$ este număr rațional, atunci $x\sqrt{p}$ este număr irațional.

✓ Dacă în descompunerea în produs de factori primi a numărului natural $a$ există o putere cu exponent impar, atunci $\sqrt{a}$ este număr irațional.

✓ Nu există numere raționale care să fie iraționale. Cum puteți formula această proprietate cu ajutorul scrierii matematice?

✓ Rădăcina pătrată a oricărui număr rațional mai mare sau egal cu 0, care nu se poate scrie ca pătratul unui număr rațional, reprezintă un număr irațional.

✓ Există radicali numere raționale, de exemplu $\sqrt{4}$. Există radicali numere iraționale, de exemplu $\sqrt{3}$.

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

Extindem iar ideea de număr, pentru că l-am găsit pe $\sqrt{2}$ care nu este rațional. Vom considera că aceste fracții zecimale (care au o infinitate de zecimale, dar nu sunt periodice) reprezintă *numere iraționale*. Alte exemple de numere iraționale: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{17}$...

**OBSERVAȚIE**

Rădăcina pătrată a unui număr real $a$, $a \geq 0$, este numărul $x$, $x \geq 0$ cu proprietatea că $x^2 = a$; cu alte cuvinte, un număr $x$, mai mare sau egal cu 0, al cărui pătrat este $a$.

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

❖ Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale este *mulțimea numerelor reale*, notată cu $\mathbb{R}$.

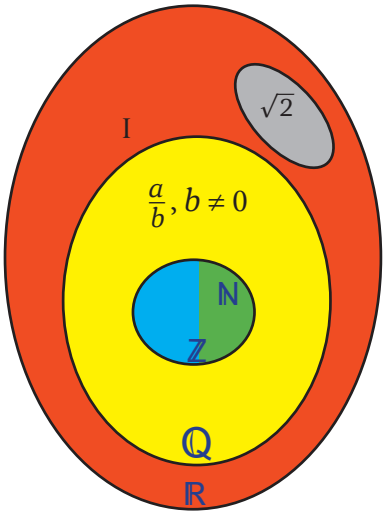
❖ $\mathbb{R}_+$ este notația pentru mulțimea numerelor reale pozitive

❖ $\mathbb{R}_-$ este notația pentru mulțimea numerelor reale negative

❖ $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ este notația pentru mulțimea numerelor reale nenegative, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor iraționale se notează cu $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$




$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = I$

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Calculați, folosind aproximările: $\sqrt{\sqrt{2}} \simeq \sqrt{1,41} \simeq 1,18$.

➢ Alegeți din mulțimea $A = \{-3,(5); -2; -\sqrt{3}; -1,6; 0; \sqrt{1}; \sqrt{4}; 2\sqrt{5}; 5; 7,2\}$ numerele: a) naturale; b) întregi; c) raționale; d) iraționale.

*Rezolvare.* a) numere naturale: 0; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$ și 5; b) numere întregi: –2, 0; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$ și 5; c) numere raționale: –3,(5); –2; –1,6; 0; $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; 5 și 7,2; d) numere iraționale: $-\sqrt{3}$; $-2\sqrt{5}$.

➢ Arătați că: a) $\sqrt{5n+3} \notin \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17 + 7} \notin \mathbb{Q}$.

*Rezolvare.* a) $5n + 3$ reprezintă un număr natural cu cifra unităților 3 sau 8, deci nu poate fi un pătrat perfect; b) În produsul numerelor $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17$ regăsim factorii 2 și 5, deci cifra unităților produsului este 0, iar ultima cifră a expresiei de sub radical este 7, care nu corespunde cifrei unităților niciunui pătrat perfect.

## IMPORTANT

✓ Numim partea întreagă a unui număr $x$ (notată $[x]$) cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul dat. Exemplu: $[2,7] = 2$.

✓ Numim partea fracționară a lui $x$ (notată $\{x\}$) diferența dintre numărul $x$ și partea sa întreagă. Exemplu: $\{2,7\} = 2,7 - 2 = 0,7$.

## ATENȚIE

Radicalii nu sunt singurele exemple de numere iraționale! De exemplu, 0,123456..., format prin alăturarea (ca zecimale în acest număr) tuturor numerelor naturale nu este o fracție zecimală periodică, ci tot un număr irațional. Construiți și voi astfel de numere iraționale!

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Aflați partea întreagă și partea fracționară a numerelor: $3$; $-1,17$; $-\sqrt{3}$.

*Rezolvare.*

$[3] = 3$ și $\{3\} = 0$; $[-1,17] = -2$ și $\{-1,17\} = -1,17 - (-2) = 0,83$;

$[-\sqrt{3}] = [-1,732050807\ldots] = -2$ și $\{-\sqrt{3}\} = 2 - \sqrt{3}$.

## DESCOPERIȚI



Cum folosim calculatorul științific pentru a calcula valoarea, cu o aproximație oarecare, a rădăcinii pătrate dintr-un număr?

Observăm în poză, pentru $\sqrt{7}$, cum găsim valoarea aproximată prin lipsă la trei zecimale: apăsăm 7, după care apăsăm tasta $\sqrt{\ }$. Știm că $\sqrt{7}$ este număr irațional și observăm numărul mare de zecimale, dar oricum și el (numărul de zecimale) este limitat de ecranul calculatorului. Cu o aproximare de trei zecimale $\sqrt{7} \simeq 2,645$. În colțul din dreapta sus observați *sqrt(7),* care este abrevierea pentru radical (din 7 în cazul nostru) și vine de la *square root.*

## EXERSAȚI

**1.** Calculați cu aproximare la zecimi radicalii:

a. $\sqrt{5}$ b. $\sqrt{7}$ c. $\sqrt{6}$ d. $\sqrt{8}$ e. $\sqrt{10}$

f. $\sqrt{13}$ g. $\sqrt{45,61}$ h. $\sqrt{94,52}$ i. $\sqrt{75,32}$

j. $\sqrt{37,1}$ k. $\sqrt{11}$ l. $\sqrt{16}$

**2.** Demonstrați că numerele $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{11}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{68}$ nu sunt numere raționale.

**3.** Aflați partea întreagă și partea fracționară a numerelor: $-4$; $\sqrt{49}$; $6,25$; $-2\sqrt{5}$.

**4.** Alegeți din mulțimea $A = \{-3; -2,14; -\sqrt{2}; -1,(6); 0; 2,(1); \sqrt{5}; 4; 6,12\}$ numerele:

a) naturale; b) întregi;

c) raționale; d) iraționale.

**5.** Aflați cel mai mic număr natural nenul $x$ pentru care:

a) $\sqrt{12 \cdot x} \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{6(x+1)} \in \mathbb{N}$.

c) $\sqrt{180(2x+1)} \in \mathbb{N}$;

d) $\sqrt{1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{45}} = 2^x$.

**6.** Arătați că:

a) $\sqrt{5n+2} \notin \mathbb{Q}$ $n \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{6^n - 4} \notin \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**7.** Arătați că:

a) $\sqrt{1 + 3 + 5 + \ldots + 71} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{1 + 3 + 5 + \ldots + 97} \in \mathbb{Q}$.

**8.** Arătați că, dacă $p$ este prim, atunci $\sqrt{p}$ este număr irațional.

**9.** Arătați că, dacă $\sqrt{p}$ este număr irațional și $x$ este număr rațional, atunci $x\sqrt{p}$ este număr irațional.

**10.** Arătați că, dacă în descompunerea în factori primi a numărului natural $a$ există o putere cu exponent impar, atunci $\sqrt{a}$ este număr irațional.

# MODULUL UNUI NUMĂR REAL

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Calculați: a) $\left|\frac{15}{73}\right|$; b) $|-\sqrt{6}|$; c) $-|1,2|$; d) $|-2\sqrt{7}|$; e) $|4\sqrt{2}|$; f) $|0|$.

*Rezolvare.* a) $\left|\frac{15}{73}\right| = \frac{15}{73}$; b) $|-\sqrt{6}| = \sqrt{6}$; c) $-|1,2| = -1,2$; d) $|-2\sqrt{7}| = 2\sqrt{7}$; e) $|4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$; f) $|0| = 0$.

**NE AMINTIM!**

La fel ca la numerele raționale, *modulul* (sau valoarea absolută) unui număr real este *distanța pe axa numerelor de la origine la reprezentarea numărului*. Modulul unui număr real se notează cu $|a|$ și are valoare mai mare sau egală cu 0.

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

❖ Modulul oricărui număr real este un număr mai mare sau egal cu 0: $|a| \geq 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
❖ Modulul numărului 0 este numărul zero: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
❖ Modulul unui număr real este egal cu modulul opusului său: $|a| = |-a|$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
❖ Dacă două numere reale au același modul, atunci ele ori sunt egale, ori sunt opuse: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$.
❖ Modulul produsului a două numere reale este egal cu produsul modulelor lor: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
❖ Modulul raportului a două numere reale este egal cu raportul modulelor lor: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$.
❖ Pentru orice număr real $b$, $b \geq 0$ au loc relațiile:
$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$; $|a| \geq b \Leftrightarrow (a \leq -b$ sau $a \geq b)$.




**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $|\sqrt{11}| < 0$; b) $-\left|1\frac{1}{7}\right| \geq 0$; c) $|-2\sqrt{2}| \geq 0$; d) $\left|-\frac{2}{5}\right| = 0,4$; e) $|-3| < 3$; f) $|-5| \leq -5$; g) $|5 + 7| \leq |5| + |7|$; h) $|-5 + 7| \leq |-5| + |7|$.

*Rezolvare.* a) $|\sqrt{11}| < 0$ este fals pentru că modulul este întotdeauna mai mare sau egal cu 0; b) $-\left|1\frac{1}{7}\right| \geq 0$ este fals pentru că opusul unui modul este întotdeauna negativ; c) $|-2\sqrt{2}| \geq 0$ este adevărat; d) $\left|-\frac{2}{5}\right| = 0,4$ este adevărat; e) $|-3| = 3 < 3$ este fals; f) $|-5| \leq -5 \Leftrightarrow 5 \leq -5$ este fals; g) $|5 + 7| \leq |5| + |7| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |12| \leq 12$ este adevărat; h) $|-5 + 7| \leq |-5| + |7| \Leftrightarrow |2| \leq 12$ este adevărat.

➢ Pentru $a = \sqrt{2}$, calculați: a) $|-a|$; b) $|-a| - 1$; c) $|a| - |-a|$.

*Rezolvare.* a) $|-a| = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; b) $|-a| - 1 = \sqrt{2} - 1$; c) $|a| - |-a| = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

➢ Aflați $x$ număr real pentru care: a) $|x| = |12|$; b) $|2x + 1| = -1$; c) $|-x| = 0$.

*Rezolvare.* a) $|x| = |12| \Leftrightarrow x = \pm 12$; b) $|2x + 1| = -1$ are soluția $S = \varnothing$ pentru că un modul nu poate fi niciodată negativ; c) $|-x| = 0$ dacă $-x = 0$, adică $x = 0$;

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Aflați $x$ număr real pentru care: a) $|3-x|+|6-2x|=6$; b) $|1-x|=|2x-2|$; c) $4\cdot\left|\frac{3x-1}{4}\right|=5$; d) $\frac{|5x|}{|x|}+\frac{|x-1|}{|1-x|}=6, x\neq 0, x\neq 1$.

*Rezolvare.*

a) $|3-x|+|6-2x|=6\Leftrightarrow|3-x|+|2(3-x)|=6\Leftrightarrow|3-x|+|2|\cdot|3-x|=6\Leftrightarrow 3|3-x|=6\Leftrightarrow x\in\{1;5\}$;

b) $|1-x|=|2x-2|\Leftrightarrow|-(x-1)|=|2(x-1)|\Leftrightarrow|-1|\cdot|x-1|=|2|\cdot|x-1|\Leftrightarrow|x-1|=2|x-1|\Leftrightarrow|x-1|=0\Leftrightarrow x=1$; ecuația poate fi rezolvată și astfel: $|1-x|=|2x-2|\Leftrightarrow 1-x=\pm(2x-2)$; cazul I: $1-x=2x-2\Leftrightarrow 3=3x\Leftrightarrow x=1$ și cazul II: $1-x=-2x+2\Rightarrow x=1$;

c) $4\cdot\left|\frac{3x-1}{4}\right|=5\Leftrightarrow 4\cdot\frac{|3x-1|}{|4|}=5\Leftrightarrow|3x-1|=5\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$;

d) $\frac{|5x|}{|x|}+\frac{|x-1|}{|1-x|}=6\Leftrightarrow\frac{|5|\cdot|x|}{|x|}+\frac{|x-1|}{|x-1|}=6\Leftrightarrow 6=6$ relație adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

➢ Aflați $x$ număr întreg pentru care: a) $|x|\geq 15$; b) $|x|\leq 3$; c) $|2x+4|\leq|-2|$.

*Rezolvare.* a) $|x|\geq 15\Leftrightarrow x\leq -15$ sau $x\geq 15\Leftrightarrow x\in\{\ldots -17;\ -16;\ -15;15;16;17\ldots\}$;

b) $|x|\leq 3\Leftrightarrow -3\leq x\leq 3\Leftrightarrow x\in\{-3;\ -2;\ -1;0;1;2;3\}$;

c) $|2x+4|\leq|-2|\Leftrightarrow|2x+4|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq 2x+4\leq 2\Leftrightarrow -6\leq 2x\leq -2\Leftrightarrow -3\leq x\leq -1\Leftrightarrow x\in\{-3;\ -2;\ -1\}$.

➢ Calculați: a) $|-5\sqrt{2}|$; b) $|-5\sqrt{2}-3|$; c) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; d) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

*Rezolvare.* a) $|-5\sqrt{2}|=5\sqrt{2}$; b) Cum $-5\sqrt{2}-3<0$, avem $|-5\sqrt{2}-3|=-(-5\sqrt{2}-3)=5\sqrt{2}+3$;

c) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1(\sqrt{2}\simeq 1,41>1)$; d) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1\ (\sqrt{3}\simeq 1,73>1)$.

## EXERSAȚI

**1.** Calculați: $|-15|$; $|-1,3|$; $|\sqrt{12}|$; $|\sqrt{121}-\sqrt{169}|$; $-|-7\sqrt{5}|$; $|-6\sqrt{5}+17-\sqrt{289}|$.

**2.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $|-\sqrt{37}|<0$; b) $\left|-1\frac{2}{5}\right|\geq 0$; c) $-|-3\sqrt{3}|\geq 0$;

d) $\left|-\frac{8}{5}\right|=1,6$; e) $|-8-10|\leq|-8|-|-10|$;

f) $|x|<0$; g) $x^4|x|\geq 0$.

**3.** Fără a calcula modulele, explicați de ce următoarele egalități sunt adevărate pentru orice număr real $x$:

a) $|2|\cdot|1,5|=|3|$; b) $\left|\frac{25}{10}\right|=\frac{|5|}{|2|}$;

c) $\left|\frac{5}{4}\right|\cdot|7|=\frac{|70|}{|8|}$; d) $\left|\frac{x+2}{3}\right|+1=\frac{|x+2|+|3|}{|3|}$;

e) $|4\cdot(2x-1)|+8=|4|\cdot(|2x-1|+2)$;

f) $\left|\frac{3x+9}{2}\right|-|3|=\left|\frac{3}{2}\right|\cdot(|x+3|-|2|)$

**4.** Pentru $a=\sqrt{5}$, calculați:

a) $|-a|$; b) $|-a|-5$; c) $|a|-|-a|$.

**5.** Aflați numerele reale $x$ pentru care:

a) $|x+1|=|15|$; b) $|2x-3|=|-7|$;

c) $|x-1|+|2x-2|=6$; d) $\frac{|2x+3|}{|6x+9|}=\frac{1}{3}, x\neq -\frac{3}{2}$;

e) $|2x-3|+|4x-6|+|9-6x|=30$;

f) $|x+2|+\frac{3\cdot|5x+10|}{5}-4\cdot\left|\frac{9x+18}{6}\right|=1$.

**6.** Aflați numerele întregi $x$ pentru care:

a) $|x|\geq 0$; b) $|x|\geq 7$; c) $|x|\leq 4$; d) $|x|\leq 0$.

**7.** Calculați: a) $\left|3-\frac{3}{4}\right|$; b) $|4,75-3,12-1,85|$;

c) $|x^2+1|-1$; d) $\left|\frac{4}{7}-\sqrt{25}\right|+\left|\sqrt{16}-\frac{3}{7}\right|$.

**8.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\subset\mathbb{Q}$; c) $-\sqrt{9}\in\mathbb{Q}$;

d) $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap\mathbb{Q}=\varnothing$; e) $\sqrt{28}\notin\mathbb{Q}$;

f) $4,01001000100001\ldots\in\mathbb{Q}$.

**9.** Rezolvați ecuația:

$|||x|+1|-3|+5=20$.

# COMPARAREA ȘI ORDONAREA NUMERELOR REALE. REPREZENTAREA NUMERELOR REALE PE AXA NUMERELOR PRIN APROXIMĂRI

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Reprezentați pe axa numerelor: $A(1)$; $B(2,5)$; $C(-1)$; $D(-3,5)$.

➢ Cum reprezentăm pe axa numerelor numerele iraționale?

*Rezolvare.* Ne vom referi la reprezentarea numărului $\sqrt{2}$.

La calcularea numărului $\sqrt{2}$ obținem ca aproximări:

| Aproximare | Întregi | Zecimi | Sutimi | Miimi | Zecimi de miimi |
|---|---|---|---|---|---|
| prin lipsă | 1 | 1,4 | 1,41 | 1,414 | 1,4142 |
| prin adaos | 2 | 1,5 | 1,42 | 1,415 | 1,4143 |




și așa mai departe ...

## NE AMINTIM!

Se numește *axa numerelor* ansamblul format din: o dreaptă numită *direcție*, un punct pe dreaptă (notat cu $O$) numit *origine*, un *sens* (spre dreapta), o *unitate de măsură*. Orice număr rațional poate fi reprezentat pe axă folosind unitatea de măsură cu care măsurăm, începând de la origine. Numărului îi va corespunde un punct notat cu o literă mare. Spunem că numărul este coordonata punctului respectiv. De exemplu, dacă punctului $A$ îi corespunde numărul 1, vom nota $A(1)$ și vom citi „$A$ de coordonată 1”.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Putem reprezenta numărul $\sqrt{2}$ cu exactitate (excepție erorile datorate instrumentelor de măsură) astfel:

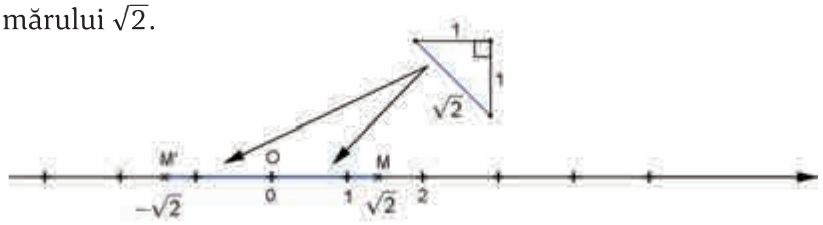
• Desenăm un triunghi dreptunghic isoscel, cu lungimile catetelor de 1 cm.

• Calculăm lungimea ipotenuzei:

$i^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow i^2 = 2 \Rightarrow i = \sqrt{2}$ (Teorema lui Pitagora).

• Luăm în deschiderea compasului lungimea ipotenuzei și, cu vârful compasului în originea axei ($O$), trasăm un arc de cerc care taie axa numerelor spre sensul pozitiv, obținându-se punctul $M(\sqrt{2})$.

Dacă trasăm și un arc de cerc care taie axa numerelor spre sensul negativ, obținem și punctul $M'(-\sqrt{2})$; $-\sqrt{2}$ este opusul numărului $\sqrt{2}$.

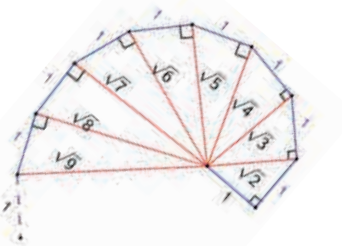



## IMPORTANT

În reprezentările anterioare ne-am folosit de încadrarea pe axă a poziției corespunzătoare numărului $\sqrt{2}$ între perechile de numere raționale ce reprezintă aproximări ale sale; cu cât numărul de zecimale ale aproximărilor crește, cu atât încadrarea este mai precisă. Însă, prin acest procedeu, de fiecare dată doar ne vom apropia de poziția exactă corespunzătoare numărului $\sqrt{2}$.

## DESCOPERIȚI

Cum au fost determinate lungimile segmentelor inscripționate cu valori în desenul următor.




## NE AMINTIM!

Comparăm numere raționale:

✓ Dintre două fracții pozitive cu același numitor, este mai mică fracția cu numărătorul mai mic: $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ dacă $a < b$, oricare ar fi numerele naturale $a, b$ și numărul natural nenul $n$.

✓ Dintre două fracții pozitive cu același numărător, este mai mică fracția cu numitorul mai mare: $\frac{m}{a} < \frac{m}{b}$ dacă $a > b$, oricare ar fi numerele naturale nenule $a, b$ și numărul natural $m$.

✓ Pentru a compara numere raționale pozitive scrise sub formă zecimală, comparăm întregii, apoi părțile zecimale (dacă întregii sunt egali).

✓ Dacă avem un număr rațional negativ și un număr rațional pozitiv, este mai mare numărul pozitiv.

✓ Dacă avem două numere raționale negative, este mai mare cel cu modulul mai mic.

✓ Dacă reprezentăm numerele pe axă, numărul din stânga este mai mic decât numărul din dreapta.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Putem reprezenta numărul $\sqrt{3}$ folosind aceeași metodă ca pentru $\sqrt{2}$: desenăm un triunghi dreptunghic cu o catetă de lungime 1 cm și cealaltă catetă cu lungimea $\sqrt{2}$ cm (determinată mai sus); lungimea ipotenuzei ($i^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2$) va fi de $\sqrt{3}$ cm. Cu ajutorul compasului determinăm punctele $N(\sqrt{3})$ și $N'(-\sqrt{3})$ pe axă.

## OBSERVAȚII

Astfel putem reprezenta pe axa numerelor orice număr real (cu aproximație sau cu exactitate).

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Numerele reale se reprezintă ca fracții zecimale finite sau ca fracții zecimale infinite periodice sau neperiodice. În consecință, regulile de comparare ale numerelor reale sunt cele învățate la numere raționale.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Comparați numerele:
a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{2}{5}$; b) $-\frac{3}{2}$ și $-\frac{5}{4}$.

*Rezolvare.* a) $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ deoarece este mai mică fracția cu numitorul mai mare; b) Vom compara întâi modulele, $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$, deci $-\frac{3}{2} < -\frac{5}{4}$.

➢ Comparați numerele: a) $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{5}$; b) $\sqrt{6}$ și $\sqrt{7}$; c) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$.

*Rezolvare.* a) $\sqrt{3} > -\sqrt{5}$ deoarece numărul negativ este mai mic; b) $\sqrt{6} < \sqrt{7}$ pentru că $6 < 7$; c) Introducem factorii sub radicali și, cum $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ și $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, avem $\sqrt{12} < \sqrt{18}$, deci $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

➢ Ordonați crescător numerele: a) $\frac{8}{7}$; $-\frac{11}{7}$; $-\frac{6}{7}$; $\frac{10}{7}$; 0; $-\frac{3}{7}$; 1; b) 1,2; –3,(6); $-\sqrt{6}$; $\sqrt{18}$; $5\sqrt{2}$; –3.

*Rezolvare.* a) $-\frac{11}{7}$; $-\frac{6}{7}$; $-\frac{3}{7}$; 0; 1; $\frac{8}{7}$; $\frac{10}{7}$.
b) Comparăm între ele numerele negative, $-3,(6) < -3 < -\sqrt{6}$, apoi le comparăm între ele pe cele pozitive: $1,2 < \sqrt{18}\,(= 4,24\ldots) = 3\sqrt{2} < 5\sqrt{2}$. Obținem: $-3,(6)$; $-3$; $-\sqrt{6}$; 1,2; $\sqrt{18}$; $5\sqrt{2}$.

➢ Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $1 \le \sqrt{2} \le 1,4$; b) $\sqrt{3} > 1,73$; c) $-4 < -\sqrt{15} < -3$; d) $-\sqrt{17} \ge -4$.

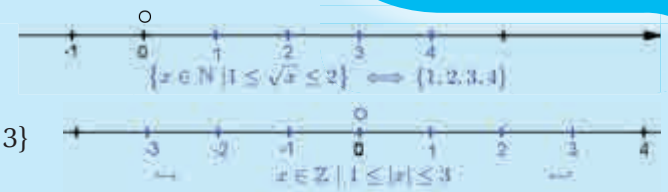
*Rezolvare.* a) $1 \le \sqrt{2} \le 1,4$ fals; b) $\sqrt{3} > 1,73$ adevărat;
c) $-4 < -\sqrt{15} < -3 \Leftrightarrow 4 > \sqrt{15} > 3$ adevărat; d) $-\sqrt{17} \ge -4$ fals.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Reprezentați pe axă elementele mulțimilor:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le \sqrt{x} \le 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le |x| \le 3\}$.

*Rezolvare.* $1 \le \sqrt{x} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$;
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le \sqrt{x} \le 2\} = \{1; 2; 3; 4\}$

și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le |x| \le 3\} = \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}$




➢ Explicitați modulele: a) $|2 - \sqrt{3}|$; b) $|2\sqrt{5} - 5\sqrt{3}|$;
c) $\sqrt{(4\sqrt{2} - 5,(6))^2}$; d) $|2\sqrt{6} + 3\sqrt{7}|$; e) $|-\sqrt{2} - \sqrt{3}|$.

*Rezolvare.* a) Rezultatul $|2 - \sqrt{3}|$ trebuie să fie număr pozitiv. Cum $\sqrt{3} \simeq 1,73.. < 2$, rezultă $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$;
b) $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, atunci $|2\sqrt{5} - 5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$;
c) Calculăm $4\sqrt{2} = \sqrt{32} = 5,6568..$; $\sqrt{(4\sqrt{2} - 5,(6))^2} = |4\sqrt{2} - 5,(6)| = 5,(6) - 4\sqrt{2}$;
d) În modul avem un număr pozitiv, $|2\sqrt{6} + 3\sqrt{7}| = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{7}$;
e) Expresia din modul este negativă: $|-\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(-\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

➢ Încadrați numerele reale între două numere întregi consecutive, apoi aflați, pentru fiecare, partea întreagă și partea fracționară: a) $\sqrt{28}$; b) $-\sqrt{14,14}$; c) $\sqrt{101,101}$.

*Rezolvare.* a) Cum $25 < 28 < 36$, avem $5 < \sqrt{28} < 6$; $[\sqrt{28}] = 5$ și $\{\sqrt{28}\} = \sqrt{28} - 5$;
b) $-4 < -\sqrt{14,14} < -3$; $[-\sqrt{14,14}] = -4$ și $\{-\sqrt{14,14}\} = -\sqrt{14,14} + 4$;
c) $10 < \sqrt{101,101} < 11$; $[\sqrt{101,101}] = 10$ și $\{\sqrt{101,101}\} = \sqrt{101,101} - 10$.

## EXERSAȚI

**1.** Reprezentați pe axă numerele $-\sqrt{7}$; $-0,5$; $0,8$; $2\sqrt{3}$; $1$; $-3$, precum și numerele care au modulul egal cu $1,1$.

**2.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $2 \le \sqrt{5} \le 2,23$; b) $\sqrt{7} > 2,65$;
c) $-5 < -\sqrt{19} < -4$; d) $-\sqrt{13} \ge -3$.

**3.** Comparați numerele:
a) $\frac{7}{5}$ și $\frac{7}{4}$; b) $3,1(24)$ și $3,12(4)$; c) $-\frac{8}{5}$ și $-\frac{5}{8}$;
d) $\sqrt{8}$ și $-\sqrt{10}$; e) $\sqrt{28}$ și $\sqrt{32}$; f) $5\sqrt{2}$ și $4\sqrt{3}$;
g) $-5\sqrt{3}$ și $-4\sqrt{5}$.

**4.** Ordonați crescător numerele:
a) $7$; $-3\sqrt{6}$; $5\sqrt{2}$; $-4\sqrt{3}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$; $-2\sqrt{14}$;
b) $15\sqrt{2}$; $-19$; $-6\sqrt{10}$; $12\sqrt{3}$; $0$; $-14\sqrt{2}$; $-10\sqrt{3}$; $14$;
c) $-1,(2)$; $3,(6)$; $-\sqrt{17}$; $7\sqrt{3}$; $9\sqrt{2}$.

**5.** Explicitați modulele: a) $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$;
b) $|5\sqrt{5} - 8\sqrt{2}|$; c) $|\sqrt{39} - 6,(5)|$; d) $|8\sqrt{15} + \sqrt{77}|$;
e) $|-\sqrt{12} - \sqrt{13}|$; f) $\sqrt{(2\sqrt{7} - 7)^2}$; g) $\sqrt{(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})^2}$.

**6.** Încadrați numerele reale $\sqrt{0,5}$; $\sqrt{4}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{19}$; $-\sqrt{23,42}$; $\sqrt{271}$; $-\sqrt{341}$; $\sqrt{1400}$ între două numere întregi consecutive și apoi aflați partea întreagă și partea fracționară a numerelor.

**7.** Ordonați descrescător numerele:
a) $|\sqrt{2} + 1|$; $(\frac{1}{2})^{-1}$; $|2\sqrt{2} - 3|$; $\sqrt{8}$; $|1 - 2\sqrt{2}|$;
b) $|\sqrt{3} + 2|$; $(\frac{1}{3})^{-1}$; $|2\sqrt{3} - 3|$; $\sqrt{27}$; $|2 - \sqrt{3}|$.

**8.** Reprezentați pe axă elementele mulțimilor:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \le 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 2\}$,
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{5} \le \sqrt{x} < 3\}$.

**9.** Calculați $|x - y| + |y - z| + |z - x|$ știind că $z \le y \le x$, unde $x$, $y$ și $z$ sunt numere reale.

# ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR REALE

## NE AMINTIM!

Am învățat în clasele anterioare să adunăm și să scădem numere raționale.

✓ Calculați:

a) $31,2 - 3,12 + 1,92$;

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{5}{8}$;

c) $(-13) - (+15) + 7 - (-30)$.

*Rezolvare.*

a) $31,2 - 3,12 + 1,92 =$
$= 28,08 + 1,92 = 30$;

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{5}{8} = \frac{6}{24} + \frac{10}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{24}$;

c) $(-13) - (+15) + 7 - (-30) =$
$= -13 - 15 + 7 + 30 = 9$.

## IMPORTANT

Am argumentat, în exercițiul alăturat, că $2 + \sqrt{2}$ este număr irațional.

Mai general, dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ne punem întrebarea ce fel de număr este $a + x$?

Să presupunem că, dacă $a + x = b$, $b$ ar fi număr rațional. Obținem că $x = b - a$ este număr rațional (ca diferență de numere raționale), ceea ce este fals.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Să adunăm numărul rațional 2 cu numărul irațional $\sqrt{2}$.

• Reprezentăm cele două numere pe axa din figura alăturată și mutăm săgeata corespunzătoare numărului $\sqrt{2}$ în vârful săgeții corespunzătoare numărului 2. Obținem o săgeată care indică poziția *sumei* celor două numere, pe care o notăm $2 + \sqrt{2}$.




• Argumentăm că numărul $2 + \sqrt{2}$ este irațional: dacă $2 + \sqrt{2} = a$, $a$ număr rațional, atunci $a - 2$ ar fi număr rațional și, cum $a - 2 = \sqrt{2}$, am obține că $\sqrt{2}$ ar fi număr rațional, ceea ce este fals.

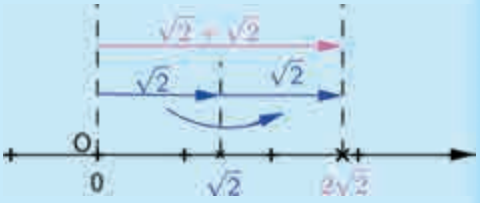
• Folosind aproximări ale numărului irațional $\sqrt{2}$, putem obține aproximări ale numărului irațional $2 + \sqrt{2}$:

| | Zecimi | | Sutimi | | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\sqrt{2}$ | $2 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $2 + \sqrt{2}$ | ... |
| Aproximare prin lipsă | 1,4 | 3,4 | 1,41 | 3,41 | ... |
| Aproximare prin adaos | 1,5 | 3,5 | 1,42 | 3,42 | ... |

• Așadar suma numerelor reale 2 și $\sqrt{2}$ este numărul real $2 + \sqrt{2}$.

➢ Să adunăm numerele reale $\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$.

• Reprezentăm pe axă, ca în figura alăturată, și obținem $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.




➢ Putem afirma și că, de exemplu, $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Prin adunarea a două numere reale $a$ și $b$ se obține un număr real, notat $a + b$, numit *suma* numerelor $a$ și $b$. Numerele $a$ și $b$ se numesc *termeni*.

❖ Suma a oricare două sau mai multe numere reale nu se schimă dacă:

• schimbăm ordinea termenilor: $a + b = b + a$ (adunarea este *comutativă*).

• grupăm termenii în moduri diferite: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (adunarea este *asociativă*).

❖ Numărul 0 este *element neutru* la adunare: $a + 0 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

## ✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Orice număr real $a$ are ca opus numărul real $-a$, $a + (-a) = 0$.

❖ Dacă $a$, $b$ sunt numere reale, se numește *diferența* numerelor $a$ și $b$ numărul real $c$, notat $a - b$, care este suma dintre $a$ și opusul lui $b$.

❖ Deci $a - b = a + (-b)$, pentru orice numere $a$ și $b$. Numărul $a$ se numește *descăzut*, $b$ se numește *scăzător* și $c$ se numește *rest* sau *diferență*.

**PROPRIETATE**

Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ $2{,}75 - 2\sqrt{3} - 1{,}46 - 0{,}29 = 2{,}75 - 1{,}46 - 0{,}29 - 2\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3}$.

➢ $\frac{1}{2} + \sqrt{5} - 3{,}25 + 1\frac{1}{4} = \sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{325}{100} + \frac{5}{4} = \sqrt{5} - \frac{3}{2}$.

Ne punem întrebarea:

*Ce obținem când adunăm două numere iraționale, reprezentate prin radicali?*

## ! ATENȚIE

❖ În calculele cu numere reale, rezultatul poate rămâne exprimat ca sumă sau diferență de numere reale.

❖ Rezultatele calculelor alăturate sunt noi exemple de numere iraționale.

**PROPRIETATE**

$a\sqrt{c} \pm b\sqrt{c} = (a \pm b)\sqrt{c}$, oricare ar fi numerele raționale $a$ și $b$ și numărul irațional $\sqrt{c}$. Cu alte cuvinte, dacă în operația de adunare/scădere este același radical, se adună/scad numerele din fața radicalului (aplicăm metoda factorului comun!).

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + 3 + 6) = 10\sqrt{2}$;

➢ $10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$;

➢ $\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = -\sqrt{5}$;

➢ $5\sqrt{2} + (-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - \sqrt{50} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$;

➢ $(2 + 3\sqrt{3}) - (1 + \sqrt{27}) = 2 + 3\sqrt{3} - 1 - \sqrt{27} = (2 - 1) + (3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = 1$.

➢ $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) + (\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$;

➢ $\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{27} + \sqrt{32} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{3} + \sqrt{2}$

## IMPORTANT

✓ În primele trei exemple din exercițiul alăturat suma/diferența unor numere iraționale este un număr irațional, iar în următoarele două exemple rezultatul calculului este un număr rațional.

✓ Atunci când într-un calcul există radicali diferiți, se grupează și se calculează termenii cu același radical, iar rezultatul poate rămâne sub forma unei sume de numere iraționale diferite.

**IMPORTANT**

✓ Suma dintre un număr irațional și opusul său are ca rezultat numărul 0, deci un număr rațional! (de exemplu, $\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=0$)

**ATENȚIE**

❖ Nu există numere reale care sunt în același timp și raționale și irraționale!

❖ Tipul rezultatului sumei/diferenței a două numere iraționale depinde de termenii implicați, rezultatul putând fi, după caz, fie irațional, fie rațional!

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Să calculăm:

a) $\sqrt{25}-3\sqrt{16}+2\sqrt{64}$;

b) $3\sqrt{8}-5\sqrt{72}+2\sqrt{18}-\sqrt{50}$;

c) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+|\sqrt{3}-\sqrt{4}|$.

*Rezolvare.*

a) $\sqrt{25}-3\sqrt{16}+2\sqrt{64}=5-3\cdot 4+2\cdot 8=5-12+16=9$;

b) $3\sqrt{8}-5\sqrt{72}+2\sqrt{18}-\sqrt{50}=3\cdot 2\sqrt{2}-5\cdot 6\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2}-$
$-5\sqrt{2}=-23\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+|\sqrt{3}-\sqrt{4}|=|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+$
$|\sqrt{3}-\sqrt{4}|=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$.

➢ Dați exemplu de două numere iraționale a căror sumă să fie un număr rațional.

*Rezolvare.* $a=1+\sqrt{5}$ și $b=1-\sqrt{5}$; $a+b=1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=2$.

**EXERSAȚI**

**1.** Calculați:

a) $\sqrt{6,4}-\sqrt{8,1}+\sqrt{4,9}$;

b) $22\sqrt{2}-15\sqrt{2}+17\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{0,0(2)}+\sqrt{0,0(8)}-\sqrt{0,1(9)}$;

d) $2\sqrt{72}-4\sqrt{18}-\sqrt{128}-3\sqrt{50}$;

e) $2\sqrt{8}-4\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$

f) $12\sqrt{3}-4\sqrt{2}-(\sqrt{3}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2})$;

g) $3\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{5}-2\sqrt{80}$;

h) $3\sqrt{6}-2\sqrt{24}+\sqrt{54}-2\sqrt{150}$;

i) $\sqrt{1,6}-\sqrt{2,5}+\sqrt{3,6}$;

j) $(3\sqrt{6}-\sqrt{3}+2\sqrt{6})-(5\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})$;

k) $\sqrt{0,(2)}-\sqrt{0,(8)}+\sqrt{3,(5)}$;

l) $(23\sqrt{6}-\sqrt{3}+12\sqrt{6})-(24\sqrt{6}-46\sqrt{3})$;

m) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$;

n) $2\sqrt{12}-\sqrt{27}-3\sqrt{75}-\sqrt{108}$;

o) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(4\sqrt{3}-7)^2}$;

p) $\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

**2.** Știind că $a=2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}$ și $c=3\sqrt{2}-5\sqrt{3}-2\sqrt{5}$, calculați:
a) $a+b+c$; b) $a+b-c$; c) $a-b-c$.

**3.** Calculați $(a+b-c)-(a-b-c)$ și $a+b+c$, dacă:
a) $a=2\sqrt{2}+\sqrt{5}-3\sqrt{7}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{5}+4\sqrt{7}$, $c=-5\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$;
b) $a=\sqrt{8}-\sqrt{27}+\sqrt{11}$, $b=\sqrt{32}+\sqrt{3}-\sqrt{11}$, $c=\sqrt{18}-\sqrt{12}+2\sqrt{11}$.

**4.** Calculați și rotunjiți rezultatele:
a) $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$;
b) $\sqrt{125}+\sqrt{5}-5\sqrt{5}$;
c) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-3\sqrt{2}$.

**5.** a) Dați exemplu de două numere iraționale a căror sumă este un număr rațional.
b) Dați exemplu de două numere iraționale a căror diferența este un număr rațional.
c) Dați exemplu de două numere iraționale a căror sumă este un număr irațional.
d) Dați exemplu de două numere iraționale a căror diferența este un număr irațional.

# ÎNMULȚIREA ȘI ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR REALE

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Prin înmulțirea a două numere reale $a$ și $b$ se obține un număr real, notat $a \cdot b$, numit *produsul* numerelor $a$ și $b$. Numerele $a$ și $b$ se numesc *factori*.

❖ Produsul oricăror două sau mai multe numere reale nu se schimbă dacă:

• schimbăm ordinea factorilor: $a \cdot b = b \cdot a$ (înmulțirea este *comutativă*).

• grupăm factorii în moduri diferite: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (înmulțirea este *asociativă)*

❖ Numărul 1 este *element neutru* la înmulțire: $a \cdot 1 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

❖ Înmulțirea este *distributivă față de adunare și față de scădere*, adică: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c$ numere reale.

❖ La înmulțirea a două numere se aplica regulile pentru semne: $(+) \cdot (+) = (+)$; $(+) \cdot (-) = (-)$; $(-) \cdot (+) = (-)$; $(-) \cdot (-) = (+)$.

## NE AMINTIM!

Am învățat în clasele anterioare să înmulțim și să împărțim numere raționale.

✓ Să calculăm:

a) $1,2 \cdot 0,5 - 3,6 : 6 + 1,3$;

b) $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{4}$;

c) $(-3)(+5) - (-30) : 15$.

*Rezolvare.*

a) $1,2 \cdot 0,5 - 3,6 : 6 + 1,3 =$
$= 0,6 - 0,6 + 1,3 = 1,3$;

b) $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{3}{3} = -1$;

c) $(-3)(+5) - (-30) : 15 =$
$= -15 + 2 = -13$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ $5 \cdot 2\sqrt{3} = (5 \cdot 2) \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$;

➢ $-4\sqrt{5} \cdot 0,5 = -(4 \cdot 0,5)\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$;

➢ $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{7} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = 15\sqrt{14}$.

## IMPORTANT

✓ Inversul numărului $\sqrt{a} - \sqrt{b}, a, b \geq 0$ este $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, iar opusul numărului $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ este $-(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = -\sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$. Atunci $(x\sqrt{a}) \cdot (y\sqrt{b}) = xy\sqrt{a \cdot b}$ și $\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}} = \frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}, y, b \neq 0$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Să calculăm:

a) $(2\sqrt{3}) \cdot (5\sqrt{5})$; b) $(-8\sqrt{6}) \cdot (4\sqrt{2})$; c) $(4\sqrt{15}) \cdot (-3\sqrt{5})$;

d) $(-\sqrt{18}) \cdot (-\sqrt{12})$; e) $2\sqrt{24}\left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$; f) $\sqrt{243}(\sqrt{2} + \sqrt{32} + 3\sqrt{72})$.

*Rezolvare.* a) $(2\sqrt{3}) \cdot (5\sqrt{5}) = (2 \cdot 5) \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}) = 10\sqrt{15}$;

b) $(-8\sqrt{6}) \cdot (4\sqrt{2}) = -32\sqrt{12} = -64\sqrt{3}$;

c) $(4\sqrt{15}) \cdot (-3\sqrt{5}) = -12\sqrt{75} = -60\sqrt{3}$;

d) $(-\sqrt{18}) \cdot (-\sqrt{12}) = \sqrt{18 \cdot 12} = \sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$;

e) $2\sqrt{24}\left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{24} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} - 2\sqrt{24} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{4} - 2\sqrt{16} = 4$;

f) $\sqrt{243}(\sqrt{2} + \sqrt{32} + 3\sqrt{72}) = 9\sqrt{3}(\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 18\sqrt{2}) = 9\sqrt{3} \cdot 23\sqrt{2} = 207\sqrt{6}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Să calculăm: a) $(12\sqrt{3}):(4\sqrt{3})$; b) $(-8\sqrt{6}):(4\sqrt{2})$;
c) $(-24\sqrt{15}):(-3\sqrt{5})$.

*Rezolvare*: a) $(12\sqrt{3}):(4\sqrt{3}) = (12:4)\cdot(\sqrt{3}:\sqrt{3}) = 3$; b) $(-8\sqrt{6}):(4\sqrt{2}) = -2\sqrt{3}$;
c) $(-24\sqrt{15}):(-3\sqrt{5}) = 8\sqrt{3}$.

➢ Calculați: a) $\sqrt{5}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$; b) $(3\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}-4\sqrt{7})$; c) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$;
d) $4\sqrt{5}\cdot(2\sqrt{15}-3\sqrt{10})-40\sqrt{3}+59\sqrt{2}$; e) $3\cdot(\sqrt{12}-\sqrt{3})+2\cdot(8\sqrt{3}-6\sqrt{3})-4\sqrt{3}$.

*Rezolvare*: a) $\sqrt{5}(2\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{15}-5$;
b) $(3\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}-4\sqrt{7}) = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{7}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{7}\cdot 4\sqrt{7} = 34-13\sqrt{14}$;
c) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 7$;
d) $4\sqrt{5}\cdot(2\sqrt{15}-3\sqrt{10})-40\sqrt{3}+59\sqrt{2} = 4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{15}-4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{10}-40\sqrt{3}+59\sqrt{2} =$
$=40\sqrt{3}-60\sqrt{2}-40\sqrt{3}+59\sqrt{2} = -\sqrt{2}$;
e) $3\cdot(\sqrt{12}-\sqrt{3})+2\cdot(8\sqrt{3}-6\sqrt{3})-4\sqrt{3} = 3(\sqrt{3})+2(2\sqrt{3}) = 7\sqrt{3}$.

➢ Calculați: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

*Rezolvare*. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} =$
$= 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

➢ Calculați produsul dintre inversul numărului $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ și opusul numărului $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

*Rezolvare*: Produsul numerelor $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ și $-(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ este egal cu 1.

## EXERSAȚI!

**1.** Calculați:
a. $3\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}-2\sqrt{2})-9\sqrt{2}+6\sqrt{6}$;
b. $4\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{6})-2\sqrt{40}+8\sqrt{3}$;
c. $2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})-2\sqrt{12}+\sqrt{40}$;
d. $3\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}-2\sqrt{2})-9\sqrt{2}+6\sqrt{6}$;
e. $2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})-2\sqrt{18}+2\sqrt{15}$;
f. $5\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{6})-10+10\sqrt{3}$;
g. $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$;
h. $(2\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$;
i. $(\sqrt{3}-2\sqrt{7})\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{7})$;
j. $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+3\sqrt{3})$;
k. $(\sqrt{6}-2\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{6}+\sqrt{5})$;
l. $5(\sqrt{18}-\sqrt{2})-4(3\sqrt{8}-5\sqrt{2})+\sqrt{2}$;
m. $6\sqrt{3}\cdot(\sqrt{8}-2\sqrt{6})+36\sqrt{2}-14\sqrt{6}$;
n. $\sqrt{363}\cdot(\sqrt{432}-\sqrt{75}-\sqrt{48})$;
o. $(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+2\sqrt{2}-\sqrt{3})$;
p. $(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)\cdot(2\sqrt{5}+\sqrt{2}-2)$;
q. $(\sqrt{7}-3\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{7}+3\sqrt{5}-\sqrt{2})$;
r. $\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{12}}-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;
s. $\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}-\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$;
t. $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}-\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$;
u. $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

**2.** a) Dați exemplu de două numere iraționale al căror produs să fie un număr rațional.

b) Dați exemplu de două numere iraționale al căror produs să fie un număr irațional.

**3.** Calculați suma și produsul dintre inversul numărului $\frac{1}{5-\sqrt{27}}$ și opusul numărului $\sqrt{27}-5$.

**4.** Aflați numerele naturale $x$ pentru care $\frac{\sqrt{1440}}{\sqrt{x+1}} \in \mathbb{N}$.

# PUTERI CU EXPONENT NUMĂR ÎNTREG

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Pentru a ridica un număr la o putere număr natural mai mare sau egal cu 2, înmulțim numărul cu el însuși, astfel încât numărul factorilor să fie egal cu exponentul.

❖ Dacă $a$ este număr real și $n$ este număr natural, $n \neq 0$, $n \neq 1$, atunci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ și $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$. În această scriere, $a$ se numește *bază*, iar $n$ se numește *exponent*.

❖ $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$ pentru orice valoare a lui $a$; $a^{-1}$ este inversul lui $a$.

❖ $a^0 = 1$, pentru orice valoare nenulă a lui $a$; $0^0$ nu are sens.

❖ $(a\sqrt{b})^n = a^n\sqrt{b^n}, n \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$.

❖ $(\sqrt{a})^{2n} = a^n$; $(\sqrt{a})^{2n+1} = a^n\sqrt{a}$, $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

## NE AMINTIM!

✓ Calculați:

a) $(-2)^5$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; c) $(0,1)^3$.

*Rezolvare:*

a) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$;

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$;

c) $(0,1)^3 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Calculați: a) $\sqrt{5}^2$; b) $\sqrt{5}^3$; c) $\sqrt{5}^4$; d) $(2\sqrt{3})^5$; e) $(-\sqrt{11})^2$; f) $(1+\sqrt{5})^2$; g) $\sqrt{8}^{-2}$; h) $(4\sqrt{3})^{-4}$; i) $\left(-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}\right)^{-4}$.

*Rezolvare.*

a) $\sqrt{5}^2 = 5$; b) $\sqrt{5}^3 = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$; c) $\sqrt{5}^4 = (\sqrt{5}^2)^2 = 5^2 = 25$; d) $(2\sqrt{3})^5 = 2^5 \cdot \sqrt{3}^5 = 32 \cdot 9\sqrt{3}$; e) $(-\sqrt{11})^2 = (-\sqrt{11}) \cdot (-\sqrt{11}) = 11$; f) $(1+\sqrt{5})^2 = (1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$; g) $\sqrt{8}^{-2} = \frac{1}{8}$; h) $(4\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{4^4 \cdot 3^2}$; i) $\left(-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}\right)^{-4} = \frac{5^2}{24^2}$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

**Reguli de calcul cu puteri**

Pentru orice numere reale nenule $a$, $b$ și pentru orice numere întregi $m$, $n$ au loc relațiile: 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ 4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ 5) $a^n : b^n = (a:b)^n$.

## DESCOPERIȚI

Ce puteți spune despre relațiile alăturate când baza puterilor este 0? Discutați la nivelul clasei!

## NE AMINTIM!

✓ Într-un calcul fără paranteze, dacă apar toate tipurile de operații (+, −, ·, :) și puteri sau radicali, se efectuează mai întâi ridicările la putere și radicalii, apoi înmulțirile și împărțirile și, în final, adunările și scăderile. Dacă operațiile sunt de același ordin, se efectuează în ordinea în care sunt scrise.

✓ De regulă, în calculul care implică paranteze, se va respecta regula de mai sus, dar se vor efectua, mai întâi, calculele dintre parantezele rotunde, apoi cele dintre parantezele drepte și, în final, cele dintre acolade.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Calculați: a) $\sqrt{7}^{17}\cdot\sqrt{7}^{24}$; b) $\sqrt{8}^{12}:\sqrt{8}^{10}$; c) $(\sqrt{15}^2)^7:\sqrt{15}^8$.

*Rezolvare.* a) $\sqrt{7}^{17}\cdot\sqrt{7}^{24}=\sqrt{7}^{41}=\sqrt{7}^{40}\cdot\sqrt{7}=7^{20}\sqrt{7}$;

b) $\sqrt{8}^{12}:\sqrt{8}^{10}=\sqrt{8}^2=8$; c) $(\sqrt{15}^2)^7:\sqrt{15}^8=\sqrt{15}^{14}:\sqrt{15}^8=\sqrt{15}^6=15^3$.

➢ Calculați: a) $\left[\sqrt{27}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}\right]^2$; b) $\left(\frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{18}}{3-\sqrt{18}}\right):(\sqrt{2})^{-2}$.

*Rezolvare.* a) $\left[\sqrt{27}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}\right]^2=(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3})^2=12$; b) $\left(\frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{18}}{3-\sqrt{18}}\right):(\sqrt{2})^{-2}=$

$\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{3-3\sqrt{2}}\right):\frac{1}{2}=\left[\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{-3(\sqrt{2}-1)}\right]:\frac{1}{2}=(-1)\cdot 2=-2.$

➢ Calculați: a) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}+\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)\cdot\frac{\sqrt{10}}{91}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5}\right)^{2012}\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{6}\right)^{2014}$.

*Rezolvare.* a) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}+\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)\cdot\frac{\sqrt{10}}{91}=\left(\frac{^{6\sqrt{5})}3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{^{2\sqrt{2})}2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}+\frac{^{3)}3}{2\sqrt{10}}\right)\cdot\frac{\sqrt{10}}{91}=\frac{90-8+9}{6\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{91}=\frac{1}{6}$.

Rezolvă exercițiul folosind proprietatea de distributivitate!

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5}\right)^{2012}\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{6}\right)^{2014}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left[\left(\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5}\right)^{2012}\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{6}\right)^{2012}\right]\left(\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{6}\right)^2=$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1^{2012}\frac{20-5\sqrt{15}}{6}=\frac{20\sqrt{5}-25\sqrt{3}}{12}$.

## EXERSAȚI

**1.** Calculați: a. $(-2\sqrt{3})^3$; b. $(-\sqrt{5})^{-3}$; c. $(-7\sqrt{8})^3$; d. $(+7\sqrt{6})^{-2}$; e. $(-12\sqrt{7})^2$; f. $(-2\sqrt{11})^{-2}$;

g. $(-13\sqrt{15})^2$; h. $(-8\sqrt{9})^{-2}$; i. $(-20\sqrt{12})^0$; j. $(-102\sqrt{37})^1$.

**2.** Calculați: a. $(-4\sqrt{5})^4\cdot(-4\sqrt{5})^6$; b. $(-\sqrt{13})^9\cdot(\sqrt{13})^{11}$; c. $(3\sqrt{4})^4\cdot(3\sqrt{4})^{-2}$; d. $(+8\sqrt{26})^{10}\cdot(8\sqrt{26})^{16}$;

e. $(+\sqrt{8})^{10}\cdot(+\sqrt{8})^{-6}$; f. $(+\sqrt{6})^{-9}\cdot(\sqrt{6})^4\cdot(\sqrt{6})^5$; g. $(-\sqrt{15})^{14}:(-\sqrt{15})^6$; h. $(7\sqrt{10})^{-3}:(+7\sqrt{10})^6$;

i. $(3\sqrt{7})^9:(3\sqrt{7})^{-9}\cdot(3\sqrt{7})^{16}$; j. $\left[(-\sqrt{6})^4\right]^5$; k. $\left[(+\sqrt{2})^{-3}\right]^{-2}$; l. $(-\sqrt{16})^3:(-\sqrt{16})^{13}\cdot(-\sqrt{16})^{10}$;

m. $\left(-\sqrt{\frac{1}{11}}\right)^{-6}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{11}}\right)^6$; n. $\left(-\sqrt{\frac{1}{14}}\right)^{-7}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{14}}\right)^{-2}$; o. $\left[(2\sqrt{3})^{-3}\right]^{-2}:36:(2\sqrt{3})$; p. $(-\sqrt{22})^{-10}:(\sqrt{22})^{11}$;

q. $(-6\sqrt{5})^6:(-6\sqrt{5})^{-5}$; r. $(6\sqrt{7})^5\cdot\sqrt{0,036\cdot 10^3}:(-3\sqrt{7})^5$.

**3.** Calculați: a. $(\sqrt{12}+\sqrt{98}-\sqrt{75}-\sqrt{32}):(\sqrt{8}-\sqrt{12})$; b. $\left(\frac{\sqrt{384}-\sqrt{150}}{\sqrt{128}-\sqrt{50}}\right)^2$; c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{10}:(\sqrt{5})^{10}$;

d. $1,(6)\cdot\left\{[0,(3)+\sqrt{5}^{-2}-\frac{2}{15}]:0,25-\frac{7}{5}\right\}-\sqrt{0,25}+\frac{1}{6}$; e. $\frac{2}{7}\cdot\left\{\frac{3}{10}-\frac{3}{2}\cdot[1,2-1,4(6)]\right\}-(\sqrt{5})^{-2}$;

f. $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-2}+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-2}$; g. $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}+\frac{25}{2\sqrt{75}}\right)-\left(\frac{12}{5\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{\sqrt{27}}{27}-\left(\frac{\sqrt{48}}{5}+2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$.

# RAȚIONALIZAREA NUMITORULUI DE FORMA $a\sqrt{b}$

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

*Raționalizarea numitorilor* este o operație prin care numitorul devine număr rațional: $\frac{1}{a\sqrt{b}} \overset{\sqrt{b}}{=} \frac{\sqrt{b}}{a\cdot b}, b>0, a\neq 0$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Raționalizați numitorii:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{24}{\sqrt{24}}$; c) $\frac{12}{5\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{10\frac{2}{3}}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{45}}+\frac{2}{\sqrt{80}}-\frac{3}{\sqrt{125}}+\frac{7}{\sqrt{20}}$;

f) $\sqrt{1+\frac{4}{5}}-\sqrt{2+\frac{6}{5}}+\sqrt{3+\frac{1}{5}}$; g) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\cdot\frac{7}{\sqrt{14}}$.

*Rezolvare:* a) $\frac{1}{\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3}}{=} \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{24}{\sqrt{24}} \overset{\sqrt{24}}{=} \frac{24\sqrt{24}}{24} = 2\sqrt{6}$;

c) $\frac{12}{5\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3}}{=} \frac{12\sqrt{3}}{5\cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$; d) $\sqrt{10\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{45}}+\frac{2}{\sqrt{80}}-\frac{3}{\sqrt{125}}+\frac{7}{\sqrt{20}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}+\frac{2}{4\sqrt{5}}-\frac{3}{5\sqrt{5}}+\frac{7}{2\sqrt{5}} =$

$= \frac{\sqrt{5}}{15}+\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3\sqrt{5}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{15}+\frac{4\sqrt{5}}{5}-\frac{3\sqrt{5}}{25} = \frac{56\sqrt{5}}{75}$;

f) $\sqrt{1+\frac{4}{5}}-\sqrt{2+\frac{6}{5}}+\sqrt{3+\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}-\sqrt{\frac{16}{5}}+\sqrt{\frac{16}{5}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; g) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\cdot\frac{7}{\sqrt{14}} =$

$= \left(\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{2\sqrt{14}}{7}+\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)\cdot\frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{6\sqrt{14}}{14}\cdot\frac{\sqrt{14}}{2} = 3$.

## NE AMINTIM!

Amplificați cu $\sqrt{5}$ următoarele fracții:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{20}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{45}}$.

*Rezolvare:*

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5}}{=} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5}}{=} \frac{\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{10}$;

c) $\frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5}}{=} \frac{5\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Observăm că fracțiile au $\sqrt{5}$ la numitor. Dacă amplificăm cu $\sqrt{5}$, nu vom mai avea la numitor niciun radical.

## DESCOPERIȚI

Există mai multe sensuri ale termenului *raționalizare*. Căutați în DEX și consultați profesorul de limba română pentru a vă elucida asupra acestor sensuri.

## EXERSAȚI

**1.** Raționalizați numitorii: a) $\frac{25}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{18}{\sqrt{12}}$; c) $\frac{18}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; e) $\frac{48}{3\sqrt{6}}$; f) $\frac{24}{\sqrt{6}}$; g) $\frac{36}{2\sqrt{6}}$; h) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; i) $\frac{20}{2\sqrt{5}}$.

**2.** Raționalizați numitorii: a) $\frac{32}{\sqrt{8}}$; b) $\frac{30}{\sqrt{50}}$; c) $\frac{64}{\sqrt{32}}$; d) $\frac{48}{5\sqrt{27}}$; e) $\frac{144}{6\sqrt{12}}$; f) $\frac{15}{\sqrt{75}}$; g) $\frac{10}{\sqrt{200}}$; h) $\frac{36}{\sqrt{216}}$.

**3.** Raționalizați numitorii: a) $\sqrt{5\frac{1}{3}}$; b) $\sqrt{8\frac{1}{3}}$; c) $\sqrt{3\frac{1}{5}}$; d) $\sqrt{16\frac{1}{3}}$; e) $\sqrt{8\frac{1}{6}}$; f) $\sqrt{40\frac{1}{2}}$.

**4.** Calculați: a. $\sqrt{1-\frac{5}{9}}-\sqrt{2-\frac{7}{16}}+\sqrt{3-\frac{3}{4}}$; b. $\sqrt{1+\frac{4}{5}}+\sqrt{25-\frac{1}{2}}-\sqrt{1-\frac{1}{10}}$; c. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{7}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{12\sqrt{6}}{17}$;

d. $\left(\frac{11}{15\sqrt{2}}+\frac{3}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right):\frac{5}{4\sqrt{6}}$; e. $\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}-\frac{3}{4\sqrt{3}}-\frac{1}{10\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{4\sqrt{15}}{3}$; f. $\frac{13}{4\sqrt{3}}+\frac{5}{2\sqrt{3}}-\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}$;

g. $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2\sqrt{6}}+\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; h. $\frac{9}{2\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{2}}-\frac{6}{4\sqrt{3}}-\frac{8}{6\sqrt{2}}$; i. $\frac{20}{3\sqrt{5}}+\frac{9}{5\sqrt{5}}-\frac{15}{9\sqrt{5}}-\frac{27}{15\sqrt{5}}$;

j. $\frac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}-\frac{6+\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{6}-5}{4\sqrt{3}}$.

# MEDIA ARITMETICĂ PONDERATĂ A $n$ NUMERE REALE, $n \geq 2$. MEDIA GEOMETRICĂ A DOUĂ NUMERE REALE POZITIVE

## NE AMINTIM!

Mara dorește să-și calculeze media la matematică știind că notele sale, la sfârșitul semestrului, sunt 8, 9, 10, 8, 7 și, la teză, 9. Ce medie va obține?

*Rezolvare.* Calculăm media notelor din oral:

$m_a = \frac{8+9+10+8+7}{5} = 8,4.$

Pentru media la final de semestru se calculează media dintre nota la teză și triplul mediei notelor de la oral:

$\frac{8,4+8,4+8,4+9}{4} = \frac{3 \cdot 8,4 + 1 \cdot 9}{4} = 8,55.$

Spunem că am calculat media ponderată a numerelor 8,4 și 9 cu ponderile 3 și 1.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fiind date două numere pozitive $a$ și $b$, acestora li se asociază alte numere, definite după anumite reguli, care sunt uzuale. Ele se numesc *medii* deoarece toate sunt cuprinse între cel mai mic dintre numerele $a$ și $b$ ( notat $\min(a, b)$ ) și cel mai mare dintre acestea ( notat $\max(a, b)$ ). Astfel:

❖ *Media aritmetică* a numerelor reale $a$ și $b$, notată $m_a$, este $m_a = \frac{a+b}{2}$.

❖ *Media ponderată* a numerelor reale $a$ și $b$ cu ponderile $m$ și $n$, numere naturale, este $\frac{ma+nb}{m+n}$.

În particular, media aritmetică este o medie ponderată cu ponderile egale cu 1.

❖ *Media geometrică* a numerelor reale pozitive $a$ și $b$, notată $m_g$, este $m_g = \sqrt{ab}$.

❖ Fiind date $n$ numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, putem defini *media aritmetică a n numere*: $m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, unde $n$ este un număr natural diferit de 0 și 1.

❖ Dacă cele $n$ numere reale pozitive au ponderile $m_1, m_2, \ldots, m_n$, numere naturale, putem defini media aritmetică ponderată a $n$ numere: $m_{ap} = \frac{m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + \ldots + m_n \cdot a_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

## IMPORTANT

✓ *Media armonică* a două numere reale este $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ (se observă că este inversa mediei aritmetice a inverselor).

✓ *Media pătratică* a două numere reale este $m_p = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

## OBSERVAȚII

❖ *Inegalitatea mediilor* a două numere reale pozitive: $\min(a,b) \leq m_g \leq m_a \leq \max(a,b)$.

❖ Media geometrică și media aritmetică a două numere reale pozitive sunt egale dacă și numai dacă numerele sunt egale.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Temperaturile dintr-o săptămână a lunii februarie au fost:

| Luni | Marți | Miercuri | Joi | Vineri | Sâmbătă | Duminică |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3°C$ | $-5°C$ | $-8°C$ | $-3°C$ | $-5°C$ | $-3°C$ | $-1°C$ |



Aflați media temperaturilor din acea săptămână.

*Rezolvare.* Calculăm media aritmetică a temperaturilor:

$$\frac{(-3°)+(-5°)+(-8°)+(-3°)+(-5°)+(-3°)+(-1°)}{7}=-4°.$$

Putem calcula și media ponderată a temperaturilor $(-3°)$, $(-5°)$, $(-8°)$, $(-1°)$ cu ponderile 3, 2, 1, 1 (temperatura de $(-3°)$ apare de 3 ori, deci are ponderea 3):

$$\frac{3\cdot(-3°)+2\cdot(-5°)+1\cdot(-8°)+1\cdot(-1°)}{3+2+1+1}=-4°.$$

➢ Completați tabelul, după ce îl copiați în caiete (după model):

| | Model | a. | b. | c. | d. |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 7 | 1,2 | 11 | 5 | $12\sqrt{3}$ |
| $b$ | 28 | 0,3 | 44 | 12,8 | $\sqrt{48}$ |
| $m_a$ | 17,5 | | | | |
| $m_g$ | 14 | | | | |

➢ Aflați media ponderată a numerelor 6; –2; 4, având ponderile 5, 8, respectiv 7.

*Rezolvare.* $m_{ap}=\frac{5\cdot 6+8\cdot(-2)+7\cdot 4}{5+8+7}=\frac{42}{20}=2,1.$

➢ Numerele 4 și $x$ au media geometrică 10. Calculați $x$.

*Rezolvare.* $\sqrt{4x}=10$ și obținem $x=25$.

➢ Se amestecă 15 litri apă de temperatură $36°C$ cu 5 litri apă de temperatură $80°C$. Ce temperatură are amestecul obținut?

*Rezolvare.* Vom calcula media aritmetică ponderată a temperaturilor de $36°C$ și $80°C$ cu ponderile 15 și 5: $\frac{15\cdot 36°+5\cdot 80°}{15+5}=47°$.

➢ Cinci numere reale au media aritmetică egală cu 7. Primele patru numere au media aritmetică egală cu 6,5. Aflați cel de al cincilea număr.

*Rezolvare.* Dacă cele cinci numere au media aritmetică egală cu 7, atunci suma lor este 35. Dacă primele patru numere au media aritmetică egală cu 6,5, atunci suma lor este 26. Obținem că al cincilea număr este 9.

➢ Fie $a=8$ și $b=2$.

a) Calculați media geometrică și media aritmetică a celor două numere și verificați inegalitatea mediilor.

b) Calculați $A=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ și $B=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

*Rezolvare*: a) $m_g=\sqrt{8\cdot 2}=4$; $m_a=\frac{8+2}{2}=5$; $b\le m_g\le m_a\le a\Leftrightarrow 2\le 4\le 5\le 8$;

b) $A=\frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}=\frac{16}{5}$, $B=\sqrt{\frac{8^2+2^2}{2}}=\sqrt{34}$.

$A$ este media armonică a celor două numere și $B$ este media pătratică a celor două numere.

## EXERSAȚI!

**1.** Calculați media aritmetică și media geometrică pentru următoarele perechi de numere reale pozitive. Verificați inegalitatea mediilor: $x \leq m_a \leq m_g \leq y$.

| | x | y | $m_g = \sqrt{x \cdot y}$ | $m_a = \frac{x+y}{2}$ | $x \leq m_g \leq m_a \leq y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Model | 64 | 144 | 96 | 104 | $64 \leq 96 \leq 104 \leq 144$ |
| a. | 6 | 24 | | | |
| b. | 14 | 14 | | | |
| c. | 144 | 2500 | | | |
| d. | 1,6 | 20 | | | |
| e. | $3\sqrt{7}$ | $5\sqrt{7}$ | | | |
| f. | $\sqrt{12}$ | $\sqrt{75}$ | | | |

**2.** Aflați media ponderată a numerelor 5; 2; 3, având ponderile 3, 5, respectiv 2.

**3.** Calculați media aritmetică ponderată și completați tabelul după model:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 1,2 | –4,2 | 6,2 | $2\sqrt{3}$ | $-\sqrt{2}$ |
| *ponderea lui x* | 3 | 5 | 4 | 2 | 6 | 3 |
| $y$ | 6 | 3,6 | 3,7 | 2 | $4\sqrt{3}$ | $-\sqrt{2}$ |
| *ponderea lui y* | 8 | 4 | 6 | 4 | 2 | 5 |
| $z$ | 7 | 4,5 | –3,1 | 5 | $6\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ |
| *ponderea lui z* | 9 | 6 | 3 | 2 | 4 | 8 |
| *media aritmetică ponderată* | 6,3 | | | | | |

**4.** Aflați media geometrică a numerelor $a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

**5.** Media aritmetică a două numere este 25,5. Calculați media lor geometrică, știind că unul dintre numere este cu 17 mai mare decât celălalt.

**6.** Două numere naturale diferite au media geometrică egală cu 7. Aflați media lor aritmetică.

**7.** Raluca trebuie să schimbe apa din acvariu. După ce a pus 30 *l* de apă la temperatura de 12°C, iar temperatura din acvariu trebuie să fie de 23°C, ce temperatură trebuie să aibă cei 20 *l* de apă pe care trebuie să-i mai pună în acvariu?



**8.** Aflați un număr real, știind că media aritmetică a jumătății sale, a sfertului său și a cincimii sale este 12,(6).

**9.** Stabiliți dacă există două numere naturale $a$ și $b$ pentru care numerele $216a$ și $36b$ să aibă media geometrică $6^{10}$.

# ECUAȚIA DE FORMA $x^2 = a$, UNDE $a \in \mathbb{R}$

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Prin calcul, $3^2 = 9$ și $(-3)^2 = 9$; observăm că atât 3 cât și $-3$ reprezintă numere care ridicate la pătrat au ca rezultat numărul 9.

Considerăm ecuația $x^2 = 9$. Rezolvarea ecuației implică determinarea unor valori pentru x care, ridicate la pătrat, să aibă rezultatul 9. Din calculele făcute, obținem că ecuația $x^2 = 9$ are soluțiile $x = 3$ și $x = -3$. Cum putem rezolva ecuația? Dacă $x^2 = 9$ putem spune că $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$, adică $|x| = 3$, de unde $x = 3$ și $x = -3$.

## NE AMINTIM!

*Ecuația* este egalitatea a două expresii care conțin atât mărimi cunoscute, cât și necunoscute, egalitatea fiind valabilă pentru anumite valori ale necunoscutelor numite *soluții* sau *rădăcini* ale ecuației. A rezolva o ecuație înseamnă a determina valorile necunoscutei, dintr-o mulțime dată, pentru care egalitatea este adevărată.

Două *ecuații* sunt *echivalente* dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Ecuația de tipul $x^2 = a$, unde $a$ este număr real pozitiv, are mulțimea soluțiilor $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Rezolvați ecuațiile: a) $x^2 = 25$; b) $x^2 = -16$; c) $x^2 = 0$; d) $8x^2 = 98$.

*Rezolvare.* a) $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5 \Leftrightarrow S = \{-5; 5\}$; b) Cum $-16$ nu este număr pozitiv, ecuația $x^2 = -16$ nu are soluții reale; c) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow S = \{0\}$;

d) $8x^2 = 98 \Leftrightarrow x^2 = \frac{98}{8} \Leftrightarrow x^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow S = \{-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\}$.

➢ Rezolvați ecuațiile: a) $(x + 5)^2 = 625$; b) $\frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(x-8)^2}{3} = \frac{7}{12}$; c) $\frac{x}{12} = \frac{3}{x}$; d) $\frac{2x^2+3}{5} - \frac{4-3x^2}{7} = 2$.

*Rezolvare.* a) $(x + 5)^2 = 625 \Leftrightarrow x + 5 = 25$ sau $x + 5 = -25 \Leftrightarrow S = \{-30; 20\}$;

b) $\frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(x-8)^2}{3} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{7(x-8)^2}{12} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow (x-8)^2 = 1 \Leftrightarrow S = \{7; 9\}$; c) $\frac{x}{12} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow S = \{-6; 6\}$;

d) $\frac{2x^2+3}{5} - \frac{4-3x^2}{7} = 2 \Leftrightarrow \frac{29x^2+1}{35} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{69}{29} \Leftrightarrow S = \{-\frac{\sqrt{69}}{\sqrt{29}}; \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{29}}\}$.

## EXERSAȚI

**1.** Verificați care dintre numerele reale: $-10$; $-2\sqrt{5}$; $3 - 3\sqrt{3}$; $0; 1; 2\sqrt{5}; \sqrt{23}$ sunt soluții ale ecuațiilor: a) $2x^2 = 200$; b) $3x^2 = 60$; c) $(x - 3)^2 = 27$.

**2.** Rezolvați ecuațiile: a. $x^2 = 256$; b. $2x^2 = -64$; c. $3 - x^2 = 1$; d. $2x^2 + 6 = 2(x^2 + 3)$; e. $5y^2 = 160$; f. $3x^2 = 96$; g. $5 - 2x^2 = 10$; h. $x^2 + 8 = 2(x^2 - 4)$.

**3.** Rezolvați ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $\frac{x}{25} = \frac{64}{x}$; b) $\frac{x+4}{18} = \frac{72}{x+4}$; c) $2(x^2 + 4) - 7 = 50$;

d) $\frac{x^2+5}{12} + \frac{2x^2}{3} + \frac{5}{2} = 3$;

e) $\frac{x^2 + 0,5}{[0,(3) + 0,25 \cdot 10 - 1,1(6)] \cdot 6} = \frac{1,5 + 0,(3)}{0,(6) + 6,(6)}$;

f) $\frac{x^2+2}{9\frac{1}{4} - 4\frac{1}{4}} = \frac{5(2,56 - 2,3 \cdot 5,12 - 0,784)}{(\frac{3}{5})^{25} : (1 - \frac{2}{5})^{24} + \frac{6^{31}}{5} : 6^{30} + 0,2}$;

g) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x^2-2}{3} + \frac{x^2-5}{4} = \frac{x^2-4}{6} - \frac{6-x^2}{8} - \frac{x^2-2}{12}$;

**4.** Putem așeza 18 piese de domino, sub formă de dreptunghi cu dimensiunile de 6 cm și 12 cm, astfel încât să formăm un pătrat? Cât este latura pătratului (dacă este posibil) și cum așezăm piesele?

## PROBLEME RECAPITULATIVE

**1.** Copiați tabelul în caiete și completați-l:

| $a$ | 576 | | 676 | | $25 \cdot 1024$ | | | $13^{18} \cdot 101^{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ | | 32 | | 41 | | $35 \cdot 14$ | $6^7 \cdot 7^6$ | |

**2.** Calculați, cu 3 zecimale, radicalii: $\sqrt{17}$; $\sqrt{25,13}$; $\sqrt{5,306}$; $\sqrt{125}$.

**3.** Introduceți factorii sub radical:

a) $18\sqrt{5}$; b) $0,2 \cdot \sqrt{150}$; c) $-3\sqrt{17}$; d) $-\frac{1}{2}\sqrt{48}$;

e) $a\sqrt{13}$; f) $-a^2\sqrt{15}$; g) $a\sqrt{5a^2}$; h) $2a\sqrt{15}$.

**4.** Scoateți factorii de sub radicali, precizând condițiile de existență:

a) $\sqrt{24a^2}$; b) $\sqrt{25a^3}$; c) $\sqrt{18ab^3}$; d) $\sqrt{48a^4b^5}$;

e) $\sqrt{\frac{5a^2}{4b^3}}$; f) $\sqrt{\frac{2^4 3^2 x^6}{5}}$; g) $\sqrt{\frac{5^4 7^3 a^7}{32}}$; h) $\sqrt{\frac{6^3 5^5 a^8}{7^2 b^6}}$.

**5.** Încadrați numerele: a) $\sqrt{123}$; b) $-\sqrt{54}$; c) $\sqrt{729}$ între două numere întregi consecutive și calculați partea întreagă și partea fracționară a lor.

**6.** Demonstrați că $\sqrt{14}$, $3\sqrt{17}$ și $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sunt numere iraționale.

**7.** Calculați:

a) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$; b) $(-24\sqrt{75}):(-3\sqrt{3})$; c) $(\sqrt{\frac{1}{3}})^5 \cdot (\sqrt{\frac{1}{3}})^3$;

d) $(-4\sqrt{18}) \cdot (-3\sqrt{2})$; e) $(\frac{3}{5})^{-3}$; f) $(-5)^3 \cdot (+5)^2$;

g) $(-48\sqrt{75}) : (-3\sqrt{3})$; h) $(-11)^{-2}$; i) $[(-2)^3]^4$;

j) $(4\sqrt{5}) \cdot (-2\sqrt{15})$; k) $(5\sqrt{2})^4$; l) $(-3\sqrt{10})^6 : (3\sqrt{10})^{-2}$;

m) $\sqrt{63} : \sqrt{7}$; n) $(2\sqrt{5})^{-2}$ o) $(2\sqrt{12}) \cdot (-3\sqrt{18})$;

p) $4\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - (5\sqrt{6} - 15\sqrt{6})$

**8.** Care este egalitatea falsă?

a) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$; b) $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$; c) $\sqrt{12 + 3} = \sqrt{15}$; d) $\sqrt{3 + 5} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

**9.** Raționalizați numitorii fracțiilor: $\frac{21}{\sqrt{7}}$; $\frac{21}{2\sqrt{3}}$; $\frac{-24}{\sqrt{3}}$; $\frac{3}{-\sqrt{6}}$; $\sqrt{3\frac{13}{4}}$.

**10.** Calculați: $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}$ și $\sqrt{1 + 2000\sqrt{1 + 2001\sqrt{1 + 2002\sqrt{1 + 2003 \cdot 2005}}}}$.

**11.** Calculați:

a) $\sqrt{1 + \frac{11}{9}} - \sqrt{2 - \frac{3}{4}} + \sqrt{1 + \frac{29}{16}}$; b) $\sqrt{13 + \frac{1}{2}} + \sqrt{4 - \frac{4}{3}} - \sqrt{4 + \frac{1}{6}}$;

c) $(\frac{7}{2\sqrt{3}} - \frac{13}{4\sqrt{3}} + \frac{5}{6\sqrt{3}}) : \frac{13}{24\sqrt{3}}$; d) $\frac{18 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} + \frac{12 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6} - 6}{\sqrt{3}}$;

e) $(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}})^{10} : (\sqrt{5})^{10}$; f) $(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{6}}) : (\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}})$;

g) $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-2}+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-2}$;

h) $\sqrt{0,(1)}-\left\{\frac{30}{7}\cdot\left[-\frac{12}{5}\cdot(1,3-0,(3)-1,1(3))-\frac{1}{3}\right]\right\}\cdot\frac{21}{10}+\sqrt{1,44}$;

i) $\sqrt{2,25}\cdot\left\{\frac{9}{13}\cdot[1,(5)-0,4(3)-1,7]-1,2+\sqrt{7,84}\right\}$;

j) $\frac{8-\sqrt{22,09}:[5-0,8:2,(6)]+0,8\cdot\sqrt{1,5625}}{[5,(3)-3,75]:1,58(3)+2}\cdot\sqrt{14,0625}:10$.




**12.** Aflați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

a) $a=4-\sqrt{15}$ și $b=4+\sqrt{15}$; b) $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $3\sqrt{3}-\sqrt{2}$; c) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ și $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

**13.** Completați tabelul următor.

| | $x$ | $y$ | $m_a=\frac{x+y}{2}$ | $m_g=\sqrt{x\cdot y}$ |
|---|---|---|---|---|
| **a.** | $3\sqrt{5}$ | | | 15 |
| **b.** | $\sqrt{6}$ | $6\sqrt{6}$ | | |
| **c.** | 3,2 | | 8 | |
| **d.** | 1,8(3) | | | 3,(6) |

**14.** Media geometrică a două numere întregi este $\sqrt{11}$. Aflați media aritmetică a lor.

**15.** Găsiți toate perechile de numere naturale pentru care $x-1$ și $7-y$ au media geometrică $\sqrt{2}$.

**16.** Fie numerele: $\frac{3}{5}$; $\sqrt{64}$; $-\frac{60}{15}$; 0,3(5); $3^{-12}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 11; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; $-6\sqrt{7}$; 0,13; 164; 11,4; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $-\frac{36}{4}$; $\sqrt{16}-\sqrt{5}$; $\pi$; $(\sqrt{18})^{-1}$; $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot24+13}$; $\sqrt{0,09}$; $-\sqrt{25}$; $|3\sqrt{7}-2\sqrt{28}|$; $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 13; $\frac{7^{23}}{7^{21}}$; 0,2(3); $2^2\cdot\frac{18}{2}$; $-25^3$; $\sqrt{7,(1)}$; $-\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 0,9; $4-\sqrt{15}$; $3^{2001}$; $\sqrt{27}$; 0.

Completați tabelul cu numerele de mai sus, ordonate crescător:

| Mulțimea | Numerele corespunzătoare mulțimilor precizate |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | |
| $\mathbb{Z}$ | |
| $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ | |
| $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ | |
| $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ | |
| $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ | |
| Numere negative | |
| Multiplii lui 3 | |
| Pătrate perfecte | |

## TESTUL 1

**Subiectul I.** Completează spațiile libere:

1. Rezultatul calculului $4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ este ... .
2. După introducerea sub radical, $3\sqrt{7}$ este egal cu ... .
3. Dintre numerele $4\sqrt{6}$ și $7\sqrt{2}$, este mai mic ... .
4. Dacă $\frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{x}$, atunci $x$ este egal cu ... .
5. Rezultatul calculului $3\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{15}$ este ... .

**Subiectul II.** Alege varianta corectă. Numai un răspuns dintre cele date este corect:

1. După raționalizarea lui $\frac{45}{\sqrt{45}}$ obținem:

a. $\sqrt{15}$ b. $3\sqrt{5}$ c. $3\sqrt{45}$ d. $\sqrt{5}$.

2. Media geometrică a numerelor 4 și 9 este:

a. 13 b. $3\sqrt{12}$ c. 6 d. $\sqrt{6}$

3. Opusul numărului $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ este:

a. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ b. $\sqrt{3} - \sqrt{5}$

c. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ d. $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

4. Rezultatul calculului $\sqrt{27} - \sqrt{12}$ este:

a. 1 b. $\sqrt{15}$ c. 0 d. $\sqrt{3}$

**Subiectul III.** Scrieți rezolvările complete:

1. Calculați $\sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$.
2. Aflați media aritmetică și media geometrică a numerelor: $a = 2 - \sqrt{3}$ și $b = 2 + \sqrt{3}$.
3. Arătați că $\sqrt{1 + 3 + 5 + \ldots + 999} \in \mathbb{Q}$.

*Punctaj. I. 5 x 0,5p, II. 4 x 1p, III. 0,5p, 1p, 1p*

## TESTUL 2

**Subiectul I.** Corelați enunțurile din coloana A cu răspunsurile din coloana B:

| A | B |
|---|---|
| 1. Rezultatul calculului $12\sqrt{75} : (-4\sqrt{3})$ este .... | 10 |
| 2. Rezultatul calculului $\sqrt{48} + \sqrt{27} - 7\sqrt{3}$ este .... | 38 |
| 3. Rezultatul calculului $\sqrt{1444}$ este ... | 8 |
| 4. Rezultatul calculului $\sqrt{6^2 + 8^2}$este... | −1 |
| 5. Dacă $a \cdot \sqrt{11} = 8\sqrt{11}$, atunci $a$ este egal cu | −15 |
| 6. Soluția negativă a ecuației $(x - 9)^2 = 100$ este... | 0 |
| 7. Opusul numărului $(\sqrt{32} + 4) - 4\sqrt{2}$ este..... | −2 |
| 8. Suma dintre opusul numărului $2 - 2\sqrt{5}$ și inversul numărului $\sqrt{20}^{-1}$ este... | −4 |

**Subiectul II.** Pe foaia de test scrieți rezolvările complete:

1. Arătați că $x = \sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{9})^2} - \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{11})^2} + \sqrt{(\sqrt{11} - 3)^2}$ este număr natural.
2. Aflați numerele naturale $x$ pentru care $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{x - 3}} \in \mathbb{N}$.
3. Calculați $x$ din proporția $\frac{x}{A} = \frac{B}{C}$, știind că: $A = 9\sqrt{50} - 3\sqrt{32} + 6\sqrt{8} + 5\sqrt{18}$,

$B = 11\sqrt{24} - 4\sqrt{150} - 3\sqrt{96} + 7\sqrt{486}$ și $C = 3\sqrt{108} - 2\sqrt{75} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{192}$.

4. a) Arătați că $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}}$, $x > 0$.

b) Calculați $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{10}} + \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11}} + \frac{\sqrt{12} - \sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{225} - \sqrt{224}}{\sqrt{224} \cdot \sqrt{225}}$.

*Punctaj. I. 8 x 0,5p, II. 1p, 1p, 1p, 2p*

# TRANSFORMAREA UNEI EGALITĂȚI ÎNTR-O EGALITATE ECHIVALENTĂ; IDENTITĂȚI

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Care dintre numerele 4; −8; 1,(6); $-5\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$ verifică relația: $4(x+7)-25-(3x+2)=x+1$?

Verificăm pe rând numerele date.

*Rezolvare:* Pentru $x=4$ obținem: $4(4+7)-25-(3\cdot 4+2)=$ $=4+1\Leftrightarrow 4\cdot 11-25-14=5\Leftrightarrow 5=5$ (adevărat).

Pentru $x=-8$ obținem: $4(-8+7)-25-[3\cdot(-8)+2]=-8+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\cdot(-1)-25-(-22)=-7\Leftrightarrow -7=-7$ (adevărat).

Pentru $x=1,(6)=\frac{5}{3}$ obținem: $4\left(\frac{5}{3}+7\right)-25-\left(3\cdot\frac{5}{3}+2\right)=\frac{5}{3}+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\cdot\frac{26}{3}-25-7=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$ (adevărat).

Pentru $x=-5\sqrt{5}$ obținem: $4(-5\sqrt{5}+7)-25-(-3\cdot 5\sqrt{5}+2)=$ $=-5\sqrt{5}+1\Leftrightarrow -20\sqrt{5}+28-25+15\sqrt{5}-2=-5\sqrt{5}+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -5\sqrt{5}+1=-5\sqrt{5}+1$ (adevărat).

Pentru $x=\sqrt{2}$ obținem: $4(\sqrt{2}+7)-25-(3\cdot\sqrt{2}+2)=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{2}+1=\sqrt{2}+1$ (adevărat).

Toate cele 6 numere verifică relația.

➢ Să aducem relația la o formă mai simplă, folosind proprietăți și reguli de calcul: $4(x+7)-25-(3x+2)=x+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x+28-25-3x-2=x+1\Leftrightarrow x+1=x+1$.

Prin echivalențe am arătat că relația este adevărată pentru orice valoare a lui $x$. Egalitatea se verifică pentru orice număr real.

➢ Arătați că egalitatea $2(2a+3)-4(b+1)-2=4(a-b)$ este adevărată pentru orice numere reale $a$ și $b$.

*Rezolvare.* $2(2a+3)-4(b+1)-2=4(a-b)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4a+6-4b-4-2=4a-4b$; $4a-4b=4a-4b$ (adevărat).

➢ Folosind proprietățile relației de egalitate (vedeți rubrica alăturată) arătați că, dacă $3x+2y=25$ și $x+4y=13$ atunci $x-y=6$, oricare ar fi numerele reale $x$ și $y$.

*Rezolvare.* Notăm prima relație, $3x+2y=25$, cu (1), respectiv a doua relație, $x+4y=13$, cu (2). Folosind proprietatea 3), scădem relația (2) din (1) membru cu membru și obținem: $3x+2y-(x+4y)=25-13$; $3x+2y-x-4y=25-13\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x-2y=12$. Împărțim ultima relație prin 2 (conform proprietății 6) și obținem $x-y=6$. Am demonstrat cerința folosind proprietățile relației de egalitate și relații echivalente.

## DESCOPERĂ

Enumerați ce reguli de calcul și ce proprietăți au fost folosite în prelucrarea relației inițiale din exercițiile alăturate!

Discutați la nivelul clasei și notați ceea ce v-ați reamintit. Vă va fi util în rezolvările viitoare!

## NE AMINTIM!

**Proprietățile relației de egalitate** sunt:

1) Oricare ar fi numerele reale $a, b, c$, dacă $a=b$, atunci $a+c=b+c$.

2) Oricare ar fi numerele reale $a, b, c, d$, dacă $a=b$ și $c=d$, atunci $a+c=b+d$.

3) Oricare ar fi numerele reale $a, b, c, d$, dacă $a=b$ și $c=d$, atunci $a-c=b-d$.

4) Oricare ar fi numerele reale $a, b, c$, dacă $a=b$, atunci $a-c=b-c$.

5) Oricare ar fi numerele reale $a, b, c$, dacă $a=b$, atunci $a\cdot c=b\cdot c$.

6) Oricare ar fi numerele reale $a, b, c$, cu $c\neq 0$, dacă $a=b$, atunci $a:c=b:c$.

**DEFINIȚIE**

Relația de egalitate în care intervin anumite *necunoscute*, adevărată pentru orice valori ale acestora, se numește *identitate*.

## DESCOPERĂ

Discutați între voi dacă era suficient pentru rezolvarea cerinței din exercițiul alăturat să folosim doar procedeul de verificare (înlocuirea lui $a$ cu 1 în relație)! Formulați concluziile la nivelul clasei!




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Arătați că relația $2(2a+3)-4(b+1)-2a=4(a-b)$ este adevărată doar pentru $a=1$.

*Rezolvare.* $2(2a+3)-4(b+1)-2a=4(a-b)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a+6-4b-4-2a=4a-4b\Leftrightarrow 2a-4b+2=4a-4b$.
Folosim metoda balanței (sau proprietatea 1) și adunăm relația cu $4b$: $2a-4b+2+4b=4a-4b+4b\Leftrightarrow 2a+2=4a$.
Scădem din ambii membri $2a$, apoi împărțim relația prin 2:
$2a+2-2a=4a-2a\Leftrightarrow 2=2a;\ 2:2=2a:2\Leftrightarrow 1=a$.

➢ Folosind relații echivalente, găsiți numerele reale $x$ pentru care sunt adevărate egalitățile:
a) $8(x+1)=8x+8$; b) $3x-12=3x+5$; c) $\frac{4x+2}{3}-\frac{x+3}{2}=\frac{5}{3}$.

*Rezolvare.*
a) $8(x+1)=8x+8\ |:8\Leftrightarrow x+1=x+1\Leftrightarrow 0=0$. Toate numerele reale verifică egalitatea.
b) $3x-12=3x+5\ |+12\Leftrightarrow 3x=3x+17\Leftrightarrow 0=17$ ($F$). Niciun număr real nu verifică egalitatea.
c) $\frac{4x+2}{3}-\frac{x+3}{2}=\frac{5}{3}\ |\cdot 6\Leftrightarrow 2(4x+2)-3(x+3)=10\Leftrightarrow$
$8x+4-3x-9=10\Leftrightarrow 5x-5=10\Leftrightarrow 5x=15\Leftrightarrow x=3$.

## EXERSAȚI

**1.** Arătați că următoarele egalități sunt adevărate pentru orice numere reale $a$ și $b$:
a) $5(a+b)+3-2b=5a+3(b+1)$;
b) $a+2b+5=6(a+b+4)-19-4b-5a$.

**2.** Folosind relații echivalente, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $2x+8=3(1-x)$;
b) $4x+5(2x+3)-1=x+1$;
c) $6x+2-3(1-2x)=2(x-1)-2x+1$.

**3.** Folosind proprietățile relației de egalitate, arătați că, dacă $8x-2y=2$ și $5x-3y=-4$, atunci $6x+2y=12$, oricare ar fi numerele reale $x$ și $y$.

# ECUAȚII DE FORMA $ax + b = 0$, UNDE $a, b \in \mathbb{R}$. MULȚIMEA SOLUȚIILOR UNEI ECUAȚII. ECUAȚII ECHIVALENTE

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Care dintre numerele 4; – 8; 1,(6); –2,5; $-5\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$ verifică relația: $4(x + 7) - 25 - (3x + 2) = x + 1$?

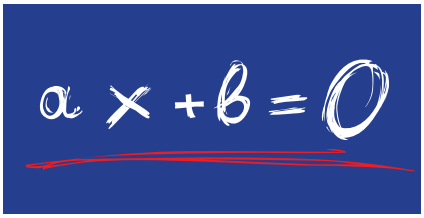
Verificăm pe rând numerele date.

Pentru $x = 4$ avem $4(4 + 7) - 25 - (3 \cdot 4 + 2) = 4 + 1$, adevărat.

Pentru $x = -8$ avem $4(-8 + 7) - 25 - [3 \cdot (-8) + 2] = -8 + 1$, adevărat.

Pentru $x = 1,(6) = \frac{16-1}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ avem $4\left(\frac{5}{3} + 7\right) - 25 - \left(3 \cdot \frac{5}{3} + 2\right) = \frac{5}{3} + 1$, adevărat.

Obținem că toate numerele date verifică relația.




**DEFINIȚIE**

*Ecuația* este egalitatea a două expresii care conțin atât mărimi cunoscute, cât și necunoscute, egalitatea fiind valabilă numai pentru anumite valori ale necunoscutelor.

Valorile necunoscutelor pentru care egalitatea este adevărată se numesc *soluții* sau *rădăcini* ale ecuației.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina valorile necunoscutei, dintr-o mulțime dată, pentru care egalitatea este adevărată. Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează, de regulă, cu S.

Două ecuații sunt *echivalente* dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Care dintre numerele 1; –1; 4,2 este soluție a ecuației $2x - 7,4 = 1$?

Verificăm pe rând numerele:

Pentru $x = 1$ avem $2 \cdot 1 - 7,4 = 1$, fals, deci $x = 1$ nu este soluție a ecuației.

Pentru $x = -1$ avem $2 \cdot (-1) - 7,4 = 1$, fals, deci $x = -1$ nu este soluție a ecuației.

Pentru $x = 4,2$ avem $2 \cdot 4,2 - 7,4 = 1$, adevărat, deci $x = 4,2$ este soluție a ecuației.

➢ Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x - 5,2 = 0$.

*Rezolvare.* Vom folosi proba scăderii: $x - 5,2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 + 5,2$; $S = \{5,2\}$.

**DESCOPERIȚI**

Discutați între voi ce concluzii putem formula privind mulțimea soluțiilor primei ecuații din rubrica alăturată. Ce limite are metoda încercărilor/verificărilor?

**DEFINIȚIE**

Ecuația de tipul $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale, se numește *ecuație de gradul I cu o necunoscută* și are *soluția* $x = -\frac{b}{a}$. Numerele $a$ și $b$ se numesc *coeficienții* ecuației și $x$ este *necunoscuta*.

**OBSERVAȚII**

❖ Ecuația de gradul I cu o necunoscută, denumită și *ecuație liniară cu o necunoscută*, se caracterizează prin faptul că puterea necunoscutei este 1 și coeficientul acesteia este nenul.

❖ Nu este obligatoriu ca necunoscuta să fie notată cu $x$. Putem nota necunoscuta cu orice literă.

❖ Ecuațiile $ax = b$ și $ax + b = c$ $(a \neq 0)$ sunt ecuații echivalente cu ecuația de gradul I cu o necunoscută: $ax = b \Leftrightarrow ax - b = 0$; $ax + b = c \Leftrightarrow ax + (b - c) = 0$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Identificați coeficienții și necunoscuta din următoarele ecuații de gradul I (sau echivalente cu ecuația de gradul I) cu o necunoscută și completați tabelul:

a) $5x - 7 = 0$; b) $4x = 3$; c) $6y + 4 = 2$; d) $mz + 9 = 0$, unde $m$ este un parametru real nenul.

*Rezolvare.*

| Ecuația | Aducerea la forma $ax + b = 0$ | Coeficienții | Necunoscuta |
|---|---|---|---|
| $5x - 7 = 0$ | | | |
| $4x = 3$ | | 4 și −3 | $x$ |
| $6y + 4 = 2$ | | | |
| $mz + 9 = 0$ | | | |

➢ Completați tabelul cu ecuațiile echivalente folosite în rezolvarea ecuațiilor:

a) $4x + 5 = 0$; b) $3x + 1 = x + 4$; c) $6x - 17 = 0$; d) $5x - 2 = 2x + 4$.

| Tipul de ecuație | Pași în rezolvare | Tipul de ecuație | Pași în rezolvare |
|---|---|---|---|
| $4x + 5 = 0$ | Scădem din ambii membri 5 | $3x + 1 = x + 4$ | Scădem din ambii membri $x$ |
| $4x = -5$ | Împărțim ambii membri prin 4 | $2x + 1 = 4$ | Scădem din ambii membri 1 |
| $x = -\frac{5}{4}$ | | $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$ | Împărțim ambii membri prin 2 |
| $6x - 17 = 0$ | | $5x - 2 = 2x + 4$ | |

➢ Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile: a) $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{x}{2,1} = \frac{3,2}{2,4}$; c) $\frac{2}{5}(x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{10}$; d) $6[2(x + \frac{1}{3}) - \frac{1}{4}] - \frac{22}{5} = \frac{11}{10}$; e) $\frac{x+1}{2} - \frac{13}{6} = \frac{3x+7}{3}$; f) $2 \cdot [\frac{3}{2} \cdot (x + \frac{x+2}{3}) - \frac{x}{4}] = \frac{3x-4}{2}$.

*Rezolvare.* a) Vom folosi proba scăderii: $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$. $S = \{\frac{5}{6}\}$;

b) $\frac{x}{2,1} = \frac{3,2}{2,4} \Leftrightarrow 2,4 \cdot x = 3,2 \cdot 2,1 \Leftrightarrow x = \frac{6,72}{2,4} \Leftrightarrow x = 2,8$; $S = \{2,8\}$;

e) $\frac{x+1}{2} - \frac{13}{6} = \frac{3x+7}{3} \mid \cdot 6 \Leftrightarrow 3x + 3 - 13 = 6x + 14 \Leftrightarrow -3x = 24 \Leftrightarrow x = -8$; $S = \{-8\}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Dacă într-o ecuație de gradul I cu o necunoscută apar două litere, una dintre ele este parametru. Textul problemei trebuie să specifice care este necunoscuta și/sau care este parametrul. Într-un enunț de tipul *"Fie ecuația* $mx + 3 = 0$*, unde* $m$ *este parametru real"* înțelegem că $x$ este necunoscuta. Pentru această ecuație aflați: a) $x$, știind că $m = 3$; b) parametrul $m$, știind că $x = 1$ este soluție a ecuației.

*Rezolvare.* a) Dacă $m = 3$, avem ecuația $3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. b) Dacă $x = 1$ este soluție a ecuației, atunci $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

➢ Aflați parametrul real $m$ știind că ecuația: a) $2x + m = 3x + 1$ are soluția $x = -2$; b) $3(2x + m) - 5 = m(x - 1) + x$ are soluția $x = 4$.

*Rezolvare.* a) $x = -2$ este soluție a ecuației dacă $2 \cdot (-2) + m = 3 \cdot (-2) + 1 \Leftrightarrow m = -1$. b) $x = 4$ este soluție a ecuației dacă $3(2 \cdot 4 + m) - 5 = m(4 - 1) + 4 \Leftrightarrow 24 + 3m - 5 = 3m + 4$, fals. Nu există $m$ pentru care ecuația dată să admită soluția $x = 4$.

➢ Aflați $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuațiile $6x + 2 = 3(x - 1) + 5$ și $4x + m = x + 2$ sunt echivalente ($m$ este parametru).

*Rezolvare.* Reamintim că ecuațiile sunt echivalente dacă au aceleași soluții. Rezolvăm prima ecuație: $6x + 2 = 3(x - 1) + 5 \Leftrightarrow 6x + 2 = 3x - 3 + 5 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. A doua ecuație are soluția $x = 0$ dacă $4 \cdot 0 + m = 0 + 2 \Leftrightarrow m = 2$.

➢ Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
a) $mx - 3 = x + 2m$, $m$ este parametrul real;
b) $2mx + 6 = 4x + 3m$, $m$ este parametrul real.

*Rezolvare.* a) $mx - 3 = x + 2m \Leftrightarrow mx - x = 2m + 3 \Leftrightarrow x(m - 1) = 2m + 3$. Dacă $m \neq 1$, atunci $x = \frac{2m+3}{m-1}$, deci soluția depinde de $m$ și $S = \left\{\frac{2m+3}{m-1}, m \neq 1\right\}$. Dacă $m = 1$, înlocuim în ecuație: $x(1 - 1) = 2 + 3$, fals, așadar ecuația nu are soluții; $S = \varnothing$.
b) $2mx + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow 2mx - 4x = 3m - 6 \Leftrightarrow 2x(m - 2) = 3(m - 2)$. Dacă $m \neq 2$, atunci $x = \frac{3(m-2)}{2(m-2)} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, deci $S = \left\{\frac{3}{2}, m \neq 2\right\}$. Dacă $m = 2$, înlocuim în ecuație: $2x(2 - 2) = 3(2 - 2)$, adevărat, așadar ecuația are o infinitate de soluții; $S = \mathbb{R}$.

➢ Aflați valorile parametrului întreg $m$ pentru care ecuația $2mx - m + 2 = mx + x + 3$ are soluții întregi.

*Rezolvare.* $2mx - m + 2 = mx + x + 3 \Leftrightarrow mx - x = m + 1 \Leftrightarrow x(m - 1) = m + 1$. Dacă $m \neq 1$, atunci $x = \frac{m+1}{m-1}$. Dacă $m = 1$, înlocuim în ecuație: $x(1 - 1) = 1 + 1$, fals, deci ecuația nu are soluții; $S = \varnothing$. Impunem ca $x = \frac{m+1}{m-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m - 1 \mid m + 1 \Leftrightarrow m - 1 \mid 2 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 2; 3\}$. Cum $m$ este nenul, $m \in \{-1; 2; 3\}$.

## IMPORTANT

✓ O ecuație este *reductibilă* la o ecuație de gradul I dacă poate fi adusă la forma $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).
*Exemplu:* $4x + 2 = 2x - 1$, prin transformări prin echivalență se aduce la forma $2x + 3 = 0$.

✓ În mulțimea numerelor reale, o ecuație care, prin transformări prin echivalență, se scrie sub forma $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) va avea mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element (o unică soluție).
*Exemplu:* $4x + 2 = 2x - 1$ are mulțimea soluțiilor $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

✓ În mulțimea numerelor reale, o ecuație care, prin transformări prin echivalență, se scrie sub forma $0 \cdot x + b = 0$, cu $b \neq 0$, va avea mulțimea vidă ca mulțime a soluțiilor (nicio soluție).
*Exemplu:* $4x + 2 = 4x - 1$, prin transformări prin echivalență devine $0 \cdot x + 3 = 0$ (fals), $S = \varnothing$.

✓ În mulțimea numerelor reale, o ecuație care, prin transformări prin echivalență, se scrie sub forma $0 \cdot x = 0$, va avea mulțimea soluțiilor egală cu mulțimea numerelor reale (orice număr este soluție). *Exemplu:* $4x - 1 = 4x - 1$, prin transformări prin echivalență, se aduce la forma $0 \cdot x = 0$ (adevărat), $S = \mathbb{R}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $(2x+1)(x-3)=0$; b) $|3x-6|=5$; c) $\frac{x-1}{12}=\frac{3}{x-1}$, $x\neq 1$; d) $x\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2x$; e) $\overline{0,x}+x=5,5$.

*Rezolvare.* a) Un produs de doi factori este egal cu 0 dacă cel puțin un factor este egal cu 0; $2x+1=0$ sau $x-3=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ sau $x=3$, adică $S=\{-\frac{1}{2};3\}$; b) $|3x-6|=5\Leftrightarrow 3x-6=-5$ sau $3x-6=5\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ sau $x=\frac{11}{3}$, $S=\{\frac{1}{3};\frac{11}{3}\}$; c) $\frac{x-1}{12}=\frac{3}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=36\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{36}\Leftrightarrow|x-1|=6\Leftrightarrow S=\{-5;7\}$; d) $x\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2x\Leftrightarrow x|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2x\Leftrightarrow x(\sqrt{5}-2)=\sqrt{5}-2x\Leftrightarrow S=\{1\}$; e) $\overline{0,x}+x=5,5\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{x}{10}+x=\frac{55}{10}\,|\cdot 10\Leftrightarrow x+10x=55\Leftrightarrow S=\{5\}$ (ceea ce corespunde condiției de cifră!).

## EXERSAȚI

**1.** Identificați coeficienții și necunoscuta din următoarele ecuații de gradul I cu o necunoscută și completați tabelul:

a) $-x-4=0$; b) $4=2x$; c) $7z-1=2z$.

| Ecuația adusă la forma $ax+b=0$ | Coeficienții | Necunoscuta |
|---|---|---|
| | | |

**2.** Completați tabelul cu ecuațiile echivalente folosite în rezolvarea ecuațiilor:

a) $-8x+4=0$; b) $\sqrt{2}\,x+1=\sqrt{8}\,x+3$;
c) $-(x-5)=2x+3$; d) $3(x-2)=2(x+4)$.

| Tipul de ecuație | Pași în rezolvare | Tipul de ecuație | Pași în rezolvare |
|---|---|---|---|
| | Pas 1: ... | | |
| | Pas 2: ... | | |

**3.** Care dintre numerele $-1$; 0,6; 1 este soluție a ecuației $5x-3=2(2-x)$?

**4.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $2x-6,2=3$; b) $\frac{6x}{5}=\frac{8}{25}$;
c) $\frac{x+1}{5}+\frac{2x-3}{4}=\frac{x+2}{10}$;
d) $2(x-\sqrt{3})=4x+5-5(1+4\sqrt{3})$;
e) $\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{6}+1$;
f) $x\sqrt{18}+\sqrt{12}=\sqrt{2}(x+\sqrt{6})+4$;
g) $x\sqrt{125}+\sqrt{27}=5x\sqrt{5}-\sqrt{3}$;
h) $\frac{x+1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{4}$; i) $\sqrt{12}(x+\sqrt{3})=4$;
j) $\sqrt{3}(x-2)+2\sqrt{3}(x+1)=6\sqrt{3}$;
k) $2[\frac{3}{2}(x+\frac{x+2}{3})-\frac{x}{4}]=\frac{3x-4}{2}$;
l) $\frac{2x-1}{\sqrt{6}}+\frac{1-x}{\sqrt{3}}-\frac{3x-2}{\sqrt{2}}=\frac{2x}{\sqrt{6}}-\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

**5.** Aflați parametrul real $m$ pentru care ecuația $mx+7=\sqrt{20}-3$ are soluția $x=\sqrt{5}$.

**6.** Aflați parametrul $m\in\mathbb{R}$ știind că ecuațiile $6(x+2)-7=4(x-1)+5$ și $5x+2(m-1)=x+3$ sunt echivalente.

**7.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2mx+6=4x+2m$, $m$ este parametrul real;
b) $(m-3)x+12=x+3m, m\neq 3, m\in\mathbb{R}$ parametru.

**8.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(5x-10)(2x+4)(x+6)=0$; b) $|x-6|=4$;
c) $|3x+5|+4=1$; d) $\frac{2x+3}{27}=\frac{3}{2x+3}, x\neq-\frac{3}{2}$;
e) $x\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=\sqrt{10}-3x$;
f) $2\sqrt{3}\cdot(3x-2)+3x=x\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-2)$;
g) $\frac{4x-3}{x-1}=\frac{12x+5}{3x+1}$;
h) $\overline{11x}+\overline{12x}+\overline{13x}+\ldots+\overline{19x}=1431$.

**9.** Aflați valorile parametrului întreg $m$ pentru care următoarele ecuații au soluții întregi:

a) $mx-4m+6=m(2x+1)+x+3$;
b) $5x+4m=mx+m^2-m$.

**10.** Scrieți câte o ecuație care să aibă câte una dintre soluțiile:

a) $x=-4$; b) $x=2\sqrt{3}$; c) $x=\frac{2m+1}{2m-1}=m\neq\frac{1}{2}$.

# SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII LINIARE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

**DEFINIȚIE**

Forma generală a *ecuației de gradul I cu două necunoscute* este $ax + by + c = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienții ecuației*, iar $c$ se numește *termen liber*.

Se numește *soluție* a ecuației $ax + by + c = 0$ o pereche de numere reale $(x_0; y_0)$ care verifică ecuația ($ax_0 + by_0 + c = 0$ devine o egalitate adevărată).

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Care dintre perechile de numere reale: $(1;3)$, $(2;0)$, $(-1;7)$ verifică ecuația $2x + y = 5$?

*Rezolvare.* Pentru $(x_0; y_0) = (1;3)$ avem $2 \cdot 1 + 3 = 5$, adevărat, deci perechea $(1;3)$ este soluție a ecuației. Pentru $(x_0; y_0) = (2;0)$ avem $2 \cdot 2 + 0 = 5$, fals, deci perechea $(2;0)$ nu este soluție a ecuației. Pentru $(x_0; y_0) = (-1;7)$ avem $2 \cdot (-1) + 7 = 5$, adevărat, deci perechea $(1;3)$ este soluție a ecuației.

**DESCOPERIȚI**

Discutați la nivelul clasei faptul că ecuația este verificată de 2 perechi de numere. Formulați ipoteze privind numărul de soluții și încercați să le validați cu argumente!

**OBSERVAȚII**

❖ Prin convenție, într-o pereche de numere, primul număr se asociază necunoscutei $x$, iar al doilea număr se asociază necunoscutei $y$. Dacă în ecuație se utilizează alte litere pentru necunoscute, atunci ar trebui să existe precizări suplimentare!

❖ Cum rezolvăm o ecuație de gradul I cu două necunoscute, de forma $ax + by + c = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}^*$?

$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = \frac{-ax - c}{b}$. Ecuația are o infinitate de soluții de forma $\left(x_0, \frac{-ax_0 - c}{b}\right)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, numită *soluție generală*. Dacă dăm o valoare lui $x_0$, obținem o *soluție particulară*: de exemplu, pentru $x_0 = 2$ avem soluția particulară $\left(2; \frac{-2a - c}{b}\right)$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Rezolvați ecuația: $2x + y = 5$ în mulțimea numerelor reale.

*Rezolvare.* $2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x$.

Soluțiile ecuației sunt de forma $(x_0, 5 - 2x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dacă $x_0 = 1$ obținem soluția $(1; 3)$. Dacă $x_0 = 2$ obținem soluția $(2;1)$. Dacă $x_0 = -1$ obținem soluția $(-1;7)$.

**IMPORTANT**

O ecuație de gradul I cu două necunoscute are o infinitate de soluții exprimate ca perechi de numere reale.

EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ a) Determinați numărul real $m$ pentru care perechea $(m; m+1)$ este soluție a ecuației $2x - y + 3 = 0$.

b) Determinați numărul real $a$ pentru care perechea $(2; 1)$ este soluție a ecuației $ax + 2y - 4 = 0$.

*Rezolvare.* a) Perechea $(m; m+1)$ este soluție a ecuației $2x - y + 3 = 0$ dacă $2m - (m+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2m - m - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

b) Perechea $(2; 1)$ este soluție a ecuației $ax + 2y - 4 = 0$ dacă $a \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

➢ Fie ecuațiile: a) $x + y + 1 = 0$; b) $2x - 3y + 5 = 0$; c) $-3x + y + 6 = 0$. Completați tabelul după model.

| Ecuația | Necunoscute | Coeficienți | Soluția generală | Soluția particulară pentru $x_0 = 1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x + y + 1 = 0$ | $x$ și $y$ | $a = b = c = 1$ | $(x_0; -x_0 - 1)$ | $(1; -2)$ |
| $2x - 3y + 5 = 0$ | | | | |
| $-3x + y + 6 = 0$ | | | | |

DEFINIȚIE

❖ Se numește *sistem de două ecuații cu două necunoscute* un ansamblu de două ecuații cu două necunoscute notat: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{cases}, a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$;

$a, b, m, n, c, p$ se numesc *coeficienții ecuației* și $c, p$ se mai numesc *termeni liberi*.

❖ O pereche de numere reale $(x_0; y_0)$ care verifică simultan cele două ecuații se numește *soluție* a sistemului: $\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ mx_0 + ny_0 + p = 0 \end{cases}$ (ambele egalități sunt adevărate).

❖ A rezolva un sistem de două ecuații cu două necunoscute înseamnă a-i determina toate soluțiile.

❖ Două sisteme de două ecuații cu două necunoscute se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.

EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Care dintre perechile de numere reale $(1; 1)$, $(-1; 0)$ este soluție a sistemului: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$?

*Rezolvare.* Pentru $(x_0; y_0) = (1; 1)$ avem $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \\ 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{cases}$, adevărat, deci perechea $(1; 1)$ este soluție a sistemului. Pentru $(x_0; y_0) = (-1; 0)$ avem $\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 5 \\ 3 \cdot (-1) + 0 = 4 \end{cases}$, fals, așadar $(-1; 0)$ nu este soluție.

Discutați la nivelul clasei cazul perechilor $(4; -1)$ și $(2; -2)$. Formulați concluzii privind cazurile în care putem decide dacă o pereche este sau nu este soluție a unui astfel de sistem!

➢ Fie sistemul de două ecuații cu două necunoscute: $\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$. Completați tabelul următor.

| Ecuația | Necunoscute | Coeficienți | Soluția generală | Soluția particulară pentru $x_0 = 2$ |
|---|---|---|---|---|
| $5x - 3y = 4$ | | | | |
| $3x + y = 8$ | | | | |

## REZOLVAREA UNUI SISTEM DE DOUĂ ECUAȚII CU DOUĂ NECUNOSCUTE PRIN METODA SUBSTITUȚIEI

**Metoda substituției**

❖ Se transformă una dintre ecuații (de regulă cea mai simplă) până se ajunge la forma $x = \ldots$ sau $y = \ldots$ (ca la rezolvarea unei ecuații cu două necunoscute). Spunem că prin acest procedeu exprimăm pe $x$ în funcție de $y$, respectiv pe $y$ în funcție de $x$.

❖ În ecuația neprelucrată se înlocuiește (substituie) $x$ sau $y$ cu expresia lui $x$, respectiv $y$, obținută din prelucrarea anterioară. Se obține o ecuație într-o singură necunoscută, fie $y$, fie $x$, care se rezolvă.

❖ Cu soluția aflată pentru una dintre necunoscute, se revine la exprimarea $x = \ldots$ sau $y = \ldots$ și se află cea de-a doua necunoscută.

❖ Recomandare: se verifică soluția sistemului.

### EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Rezolvați sistemele de două ecuații cu două necunoscute:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$.

*Rezolvare.* a)

| Sistemul | Exprimarea $x = \ldots$ | Exprimarea $y = \ldots$ |
|---|---|---|
| $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ | $x = \frac{5 - 3y}{2}$ sau $x = \frac{4 - y}{3}$ | $y = \frac{5 - 2x}{3}$ sau $y = 4 - 3x$ |

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(4 - 3x) = 5 \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 12 - 9x = 5 \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 5 - 12 \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Soluția sistemului este perechea $(1; 1)$. Verificare: $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \\ 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{cases}$, adevărat.

**Descoperiți!** Discutați la nivelul clasei de ce s-a preferat prelucrarea celei de-a doua ecuații a sistemului și de ce s-a preferat exprimarea lui $y$ în funcție de $x$. Notați-vă pe caiete concluziile!

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4 - 2y \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - 2y}{3} \\ 2x + 5y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - 2y}{3} \\ 2 \cdot \frac{4 - 2y}{3} + 5y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - 2y}{3} \\ \frac{8 - 4y}{3} + \frac{15y}{3} = -\frac{3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - 2y}{3} \\ 8 + 11y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - 2y}{3} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$. Soluția sistemului este perechea $(2; -1)$.

Verificare: $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -1 \end{cases}$, adevărat.

**Descoperiți!** Organizați-vă pe grupe de elevi și abordați rezolvarea sistemului prin metoda substituției, dar în mod diferit față de exemplul anterior. Prezentați celorlalți etapele de rezolvare. Formulați concluzii utile învățării!

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Rezolvați sistemele de două ecuații cu două necunoscute:

a) $\begin{cases} 5x+6y=7 \\ 10x+12y=10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2(x+y)-3=9 \\ 3x-15=3-3y \end{cases}$.

*Rezolvare.* a) $\begin{cases} 5x+6y=7 \\ 10x+12y=10 \,|:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6y=7 \\ 5x+6y=5 \end{cases}$, imposibil pentru că $5 \neq 7$. Sistemul nu are soluții. Mulțimea soluțiilor este mulțimea vidă.

b) $\begin{cases} 2(x+y)-3=9 \\ 3x-15=3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=12 \,|:2 \\ 3x+3y=18 \,|:3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x+y=6 \end{cases}$, deci sistemul are o infinitate de soluții, acestea fiind soluțiile ecuației $x+y=6$. Soluțiile sunt perechile $(x_0; 6-x_0), x_0 \in \mathbb{R}$.

**Descoperiți!** Discutați particularitatea acestor sisteme. A mai fost necesară aplicarea metodei substituției? Formulați la nivelul clasei concluzii și notați-le pe caiet.

## EXERSAȚI

**1.** Găsiți soluția generală și 3 soluții particulare pentru ecuația $3x-y=2$.

**2.** a) Determinați numărul real $a$ pentru care perechea $(a-1;\ a+1)$ este soluție a ecuației $x-2y+1=0$.

b) Determinați numărul real $m$ pentru care perechea $(-2;\ -1)$ este soluție a ecuației $x+my-2=0$.

**3.** Fie sistemul de două ecuații cu două necunoscute: $\begin{cases} -6x-y=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$. Copiați pe caiete tabelul următor și completați-l.

| Ecuația | Necunoscute | Coeficienți | Soluția generală | Soluția particulară pentru $x_0=-1$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**4.** Care dintre perechile de numere reale $(-2;\ -3)$; $(3\sqrt{2}; 2\sqrt{3})$;$(5; 3, 6)$ este soluție a sistemului: $\begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=12 \\ 2x-3y=6(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \end{cases}$?

**5.** Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x+1=5 \\ x+3y=11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-5=7 \\ 1-3y=-8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3(x+y)-6=0 \\ x+2y=6 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{x}{4\sqrt{5}}-\frac{y}{3\sqrt{7}}=-\frac{1}{12} \\ \frac{6x}{\sqrt{7}}-\frac{4y}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{35}}{35} \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 2x\sqrt{3}-3y\sqrt{2}=-6 \\ 3x\sqrt{2}+2y\sqrt{3}=7\sqrt{6} \end{cases}$;

g) $\begin{cases} \frac{4x+5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3y+4}{3}+\frac{1}{4} \\ (x+7)(y-2)=(4+x)(y-5) \end{cases}$;

h) $\begin{cases} \frac{x+4}{2y-2}=\frac{3x+5}{6y+1} \\ \frac{4x-5}{3}=\frac{4+y}{2} \end{cases}$;

i) $\begin{cases} (x+1)(2-\sqrt{3})+(y-2)(\sqrt{3}+3)=4-2\sqrt{3} \\ x(2+\sqrt{3})+y(\sqrt{3}-3)=3\sqrt{3}-4 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} (y+5)(x+3)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$;

k) $\begin{cases} 2(x+1)+3(3+2y)=3(y-1)+13 \\ 4x+3(2x+y-1)=2(-x+y)+8 \end{cases}$.

**6.** Scrieți un sistem de două ecuații cu două necunoscute care să aibă soluția (5; 6) și rezolvați-l prin metoda substituției.

## REZOLVAREA UNUI SISTEM DE DOUĂ ECUAȚII CU DOUĂ NECUNOSCUTE PRIN METODA REDUCERII

**Metoda reducerii**

❖ Metoda presupune alegerea uneia dintre necunoscute căruia să i se aplice procedeul descris în pasul următor.

❖ Pentru necunoscuta aleasă (fie aceasta $x$) se înmulțește fiecare dintre ecuații cu câte un număr nenul, astfel încât la adunarea, membru cu membru, a celor două noi ecuații, coeficientul rezultat pentru necunoscuta aleasă să fie 0. Deci în ecuația obținută acea necunoscută *dispare*, obținându-se astfel o ecuație într-o singură necunoscută. Spunem că am redus acea necunoscută.

❖ Se rezolvă ecuația obținută (ce conține o singură necunoscută, fie aceasta $y$), determinându-se soluția parțială (cea care corespunde necunoscutei).

❖ Se reia procedeul anterior descris, pentru a reduce cealaltă necunoscută ($y$). Se rezolvă o nouă ecuație, determinându-se valorile ce completează în pereche pe cele determinate la prima reducere.

❖ Perechea de numere obținută este soluția sistemului.

❖ Recomandare: se verifică soluția sistemului.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Rezolvați sistemele de două ecuații cu două necunoscute prin metoda reducerii: a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+y=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x+5y=-1 \end{cases}$.

*Rezolvare*. a)

| **Pași în rezolvare** | | **Pași în rezolvare** | |
|---|---|---|---|
| Înmulțim a doua ecuație cu –3. | $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+y=4 \mid \cdot(-3) \end{cases}$ | Înmulțim prima ecuație cu 3 și a doua ecuație cu –2. | $\begin{cases} 2x+3y=5 \mid \cdot 3 \\ 3x+y=4 \mid \cdot(-2) \end{cases}$ |
| Adunăm ecuațiile obținute. | $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -9x-3y=-12 \\ \hline -7x+0=-7 \end{cases}$ | Adunăm ecuațiile obținute. | $\begin{cases} 6x+9y=15 \\ -6x-2y=-8 \\ \hline 0+7y=7 \end{cases}$ |
| Obținem pe x. | $x=1$ | Obținem pe y. | $y=1$ |

Soluția sistemului este perechea (1; 1). Verificare: $\begin{cases} 2\cdot 1+3\cdot 1=5 \\ 3\cdot 1+1=4 \end{cases}$, adevărat.

b) Coeficienții necunoscutei $x$ sunt 3 și 2, iar ai necunoscutei $y$ sunt 2 și 5. Indiferent ce necunoscută alegem să reducem, trebuie să înmulțim ambele ecuații: $\begin{cases} 3x+2y=4 \mid \cdot 2 \\ 2x+5y=-1 \mid \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=8 \\ -6x-15y=3 \\ \hline 0-11y=11 \end{cases}$.

După ce obținem necunoscuta $y$, putem să combinăm cele două metode și să înlocum pe $y$ într-o ecuație pentru a afla necunoscuta $x$: $\begin{cases} y=-1 \\ 2x+5\cdot(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. Soluția sistemului este perechea (2; –1).

Verificare: $\begin{cases} 3\cdot 2+2\cdot(-1)=4 \\ 2\cdot 2+5\cdot(-1)=-1 \end{cases}$, adevărat.

➢ Rezolvați sistemele prin metoda reducerii: a) $\begin{cases} 5x+6y=7 \\ 10x+12y=10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2(x+y)-3=9 \\ 3x-15=3-3y \end{cases}$.

*Rezolvare.*

a) $\begin{cases} 5x+6y=7 \,|\cdot(-2) \\ 10x+12y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-12y=-14 \\ 10x+12y=10 \\ \hline 0+0=-4 \end{cases}$, fals pentru că $0 \neq -4$. Sistemul nu are soluții.

b) $\begin{cases} 2(x+y)-3=9 \\ 3x-15=3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=12 \,|\cdot 3 \\ 3x+3y=18 \,|\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6y=36 \\ -6x-6y=-36 \\ \hline 0+0=0 \end{cases}$, adevărat, deci sistemul are o infinitate de soluții. Soluțiile sunt perechile $(x_0; 6-x_0), x_0 \in \mathbb{R}$.

➢ Rezolvați sistemul de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{10}{x}-\frac{6}{y}=0 \end{cases}$ prin ambele metode învățate.

*Rezolvare.* Notăm $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$ și obținem $\begin{cases} 5a+3b=2 \\ 10a-6b=0 \end{cases}$ cu soluția $(a;b)=\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)$, deci $(x;y)=(5;3)$.

Discutați la nivelul clasei ce pas suplimentar a necesitat rezolvarea. Identificați în setul de exerciții următor căror sisteme li se poate aplica un pas similar de rezolvare!

Spunem că în astfel de cazuri folosim *notații ajutătoare*. Faceți analogie cu scrierea pe care o utilizați pe rețelele de socializare ☺!

**IMPORTANT**

Dacă prin adunarea sau scăderea relațiilor se anulează toți termenii ce conțin necunoscutele, precum și termenii liberi, sistemul are o infinitate de soluții. Dacă se anulează toți termenii ce conțin necunoscutele, iar termenii liberi nu se anulează, sistemul nu are soluții.

**EXERSAȚI**

**1.** Rezolvați sistemele de ecuații prin metoda reducerii:

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=5 \\ \sqrt{2}x-y=11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \sqrt{3}x-2y=5 \\ \sqrt{6}x+\sqrt{2}y=2\sqrt{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5(x+y)-10=0 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2} \\ x+y=4 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 5(2x+1)-3(y+2)=3 \\ 4(x+y)-3(3x+2y)=-9 \end{cases}$; g) $\begin{cases} \frac{4x+1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3y-5}{3}+\frac{1}{4} \\ (x+2)(y-2)=(4+x)(y-5) \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2(x+y+3)-5(x-y-1)=11 \\ 3(x+y+3)+2(x-y-1)=7 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} 4(y-x)+7(2x+y)=-1 \\ 7(y-x)+4(2x+y)=-10 \end{cases}$; j) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,7 \\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=0,5 \end{cases}$; k) $\begin{cases} \frac{7}{4x+y}-\frac{2}{4x-y}=-1 \\ \frac{5}{4x+y}+\frac{3}{4x-y}=\frac{26}{7} \end{cases}$; l) $\begin{cases} |1-x|+3|y-1|=4 \\ 2|1-x|-5|y-1|=-3 \end{cases}$;

m) $\begin{cases} 4x-5y=-3 \\ 2(x+y+1)-3(2x-y)=7 \end{cases}$; n) $\begin{cases} 8(2x+y)-5(x+2y)=x+8 \\ 5(2x+y)+3(x+2y)=16-7x+15y \end{cases}$.

**2.** Scrieți un sistem de două ecuații cu două necunoscute care să aibă soluția $(-2; -3)$ și rezolvați-l prin metoda reducerii.

# PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL ECUAȚIILOR SAU A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Anca are la geografie trei note: 8, 9 și 8. Ea vrea să obțină media 9. Aflați a patra notă necesară, astfel încât media (chiar și prin rotunjire) să fie egală cu 9.



*Rezolvare.* Notăm cu $x$ a patra notă. În aceste condiții, media aritmetică a notelor Ancăi este $\frac{8+9+8+x}{4}$. Pentru a obține media 9 (chiar și prin rotunjire), media aritmetică trebuie să fie o valoare cuprinsă între 8,5 și 9, inclusiv. Dacă $\frac{8+9+8+x}{4} = 8,5 \Leftrightarrow 25 + x = 34$ obținem $x = 9$, iar dacă $\frac{8+9+8+x}{4} = 9 \Leftrightarrow 25 + x = 36$ obținem $x = 11$, imposibil pentru că nu există nota 11. Așadar, Anca trebuie să obțină a patra notă 9 sau 10.

**IMPORTANT**

Pentru rezolvarea unei probleme cu o necunoscută, folosind ecuații, se parcurg etapele:

✓ Etapa de identificare: alegerea necunoscutei și notarea ei (de obicei conținută în întrebarea problemei!).

✓ Etapa de corelare cu realitatea: precizarea tipului de valori care sunt convenabile problemei (la exemplul anterior, tipul de valori era număr natural de la 1 la 10, acestea fiind numerele ce reprezintă note).

✓ Etapa de transpunere a textelor și informațiilor în limbaj matematic: scrierea ecuației.

✓ Etapa de rezolvare: rezolvarea ecuației.

✓ Etapa de validare: verificarea și interpretarea rezultatului găsit.

Pentru rezolvarea unei probleme cu două necunoscute, cu ajutorul sistemelor de două ecuații cu două necunoscute, se parcurg următoarele etape:

✓ Fixarea necunoscutelor și notarea lor;

✓ Scrierea modelului matematic, adică a sistemului de ecuații;

✓ Rezolvarea sistemului de ecuații;

✓ Verificarea și interpretarea rezultatului găsit.



## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Ioana a cumpărat 2 kg de mere la prețul de 3,99 lei kilogramul și 5 napolitane. În total a plătit suma de 20,48 lei. Cât costă o napolitană?

*Rezolvare.* Notăm cu $x$ prețul unei napolitane. Putem scrie: $2 \cdot 3,99 + 5x = 20,48$ și obținem $x = 2,50$ lei. Verificăm: $2 \cdot 3,99 + 5 \cdot 2,5 = 20,48$. O napolitană costă 2,50 lei.

➢ Suma a două numere naturale este 160. Aflați numerele, știind că, dacă împărțim cel mai mare număr la cel mai mic, obținem câtul 4 și restul 10.

*Rezolvare.* Avem două necunoscute $a$ și $b$ (cele două numere), și împărțind cel mai mare număr la cel mai mic obținem câtul 4 și restul 10, adică $a = 4b + 10$. Considerăm necunoscuta problemei numărul mai mic, $b$. Scriem că suma numerelor este 160 sub forma: $(4b + 10) + b = 160$. Obținem: $b = 30$ și $a = 130$. Verificăm: $30 + 130 = 160$.

➢ Dacă 4 stilouri și 10 creioane costă 57 lei, iar 5 stilouri și 7 creioane costă 63 lei, cât costă un stilou și cât costă un creion?

*Rezolvare.* Notăm cu $x$ prețul unui stilou și cu $y$ prețul unui creion.
Putem considera că prețurile se pot exprima prin numere pozitive, de regulă numere raționale.
Scriem $\begin{cases} 4x + 10y = 57 \\ 5x + 7y = 63 \end{cases}$ și rezolvăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute:

$\begin{cases} 4x + 10y = 57 \mid \cdot 5 \\ 5x + 7y = 63 \mid \cdot (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 50y = 285 \\ -20x - 28y = -252 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 10,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$. Un stilou costă 10,50 lei și un creion costă 1,50 lei. Verificare: $\begin{cases} 4 \cdot 10,5 + 10 \cdot 1,5 = 57 \\ 5 \cdot 10,5 + 7 \cdot 1,5 = 63 \end{cases}$. Valorile obținute sunt posibile din punct de vedere al contextului.



➢ Dacă Raluca ar pune câte 3 flori în câte o vază, ar mai rămâne 6 flori, iar dacă ar pune câte 5 flori, ar rămâne două vaze goale. Câte flori și câte vaze are Raluca?

*Rezolvare.* Notăm cu $x$ numărul de flori și cu $y$ numărul de vaze. Valorile căutate sunt numere naturale. Sistemul se scrie astfel: $\begin{cases} 3y = x - 6 \\ 5(y - 2) = x \end{cases}$. După rezolvare obținem $x = 30$ (flori) și $y = 8$ (vaze). Verificați soluția.

➢ Tatăl avea 22 de ani când s-a născut fiica sa și 25 de ani când s-a născut fiul său. Acum toți trei au împreună 67 de ani. Aflați ce vârstă are fiecare.

*Rezolvare.* Notăm cu $t$ – vârsta tatălui, $f$ – vârsta fetei și $b$ – vârsta băiatului. Avem sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute: $\begin{cases} f + 22 = t \\ b + 25 = t \\ f + b + t = 67 \end{cases}$. Este o nouă provocare, dar vom încerca reducerea sistemului la unul de două ecuații cu două necunoscute sau la o ecuație.

Din prima ecuație exprimăm $f = t - 22$, din a doua ecuație exprimăm $b = t - 25$ și facem înlocuirile corespunzătoare în ultima ecuație; obținem $t - 22 + t - 25 + t = 67$, de unde $t = 38$. Tatăl are, deci, 38 de ani, fiica are 16 ani, iar fiul 13 ani. Se verifică soluția obținută.

## EXERSAȚI

**1.** O sursă de apă, care are un debit de 120 de litri pe minut, alimentează două fântâni dintre care una primește de 5 ori mai multă apă decât cealaltă. Care este debitul de alimentare pentru fiecare dintre cele două fântâni?

**2.** Din cinci note pe care le are la fizică, Raluca a obținut media 8,2. Ce notă ar trebui să obțină la ultima lucrare pentru a rezulta media 9?

**3.** Într-o întreprindere lucrează 145 de oameni: de cinci ori mai mulți muncitori decât maiștri, de două ori mai mulți maiștri decât ingineri, de două ori mai mulți ingineri decât șoferi și 10 vânzători. Câți muncitori lucrează în întreprindere?

**4.** Ieri au absentat 12,5% dintre elevii clasei. Astăzi absentează cu un elev mai mult decât ieri și sunt de 5 ori mai mulți prezenți decât absenți. Care este numărul total de elevi din clasă?

**5.** Un aparat de fotografiat se ieftinește cu 20% din prețul pe care îl are. După un timp, aparatul de fotografiat se scumpește cu 20% din noul preț. După scumpire aparatul costă 960 lei.
a) Care a fost prețul inițial al aparatului de fotografiat?
b) Care a fost prețul aparatului după ieftinire?

**6.** Un fermier glumeț zice: „Am găini și iepuri. Când număr capetele, găsesc 100. Când număr picioarele, găsesc 320. Câte găini și câți iepuri am?”

**7.** O carte și un caiet costă 24 lei. Cartea costă de 15 ori mai mult decât caietul. Cât costă 10 caiete?

**8.** Într-un bloc sunt 76 de camere în 28 de apartamente cu câte două, respectiv cu câte trei camere.
a) Câte apartamente cu câte 2 camere sunt în bloc?
b) Cât la sută din numărul apartamentelor cu câte trei camere reprezintă numărul apartamentelor cu câte două camere?

**9.** Andrei și Emil sunt frați. Suma vârstelor celor doi frați este 39 de ani. În urmă cu trei ani, vârsta lui Andrei era jumătate din vârsta lui Emil.
a) Ce vârstă are Andrei acum?
b) Peste câți ani vârsta lui Andrei va fi două treimi din vârsta lui Emil?

**10.** Într-un parc auto sunt camioane și microbuze. Numărul microbuzelor este de trei ori mai mare decât al camioanelor. Dacă vor pleca 7 microbuze și vor mai veni 5 camioane, numărul microbuzelor va fi egal cu cel al camioanelor. Aflați câte camioane și câte microbuze sunt în parcul auto respectiv.

**11.** Suma a două numere este 15. Dacă suma dintre numărul de 4 ori mai mare ca primul număr și al doilea număr înmulțit cu 7 este 99, aflați numerele.

**12.** Suma cifrelor unui număr de două cifre este 11. Dacă adăugăm la numărul respectiv 63, obținem un număr format din aceleași cifre, dar așezate în ordine inversă. Aflați numărul inițial.

**13.** Dacă pe fiecare pagină a unui album am lipi 2 poze, n-ar avea loc 2 fotografii. Dacă am lipi câte 3 poze, ar rămâne 8 pagini goale. Câte pagini are albumul și câte fotografii avem?



**14.** Aflați două numere care au diferența egală cu 72 și raportul egal cu 5.

**15.** Numărătorul unei fracții este cu 20 mai mare decât numitorul. Dacă mărim numitorul cu 5 și micșorăm numărătorul cu 5, se obține rezultatul 2. Aflați fracția inițială.

PROBLEME RECAPITULATIVE

**1.** Stabiliți care dintre numerele reale $-2$; $\sqrt{5}$; $0$; $\sqrt{27}$ și $6$ verifică ecuațiile:

a) $\frac{4x}{\sqrt{3}} - 5 = \frac{6x}{3\sqrt{3}} + 1$; b) $\frac{x+9}{7} = \frac{4x+11}{3}$; c) $\frac{x+\sqrt{5}}{3} - \frac{x-2\sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{3} - 1$.

**2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $4x + 15 = x - 12$; b) $4(x+3) - 2x = 5 - 3(2-x)$; c) $5(x+6) - 2x = 36 - 3(2-x)$;

d) $\frac{7-x}{3} + 3\frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$; e) $\frac{x+3}{3} - \frac{2-2x}{2} = -4$; f) $(x-2)^2 + 3x = x(x+1)$;

g) $\sqrt{5}(3x-1) - \sqrt{3}(x+2) = 6 + 3\sqrt{5}(x+3) - x\sqrt{3}$; h) $\frac{x+1}{5} - \frac{x+3}{4} = \frac{3x}{10} - \frac{x+1}{4}$;

i) $\frac{2x-3}{3} + \frac{3x-2}{2} = \frac{4x+3}{4} - \frac{5}{12}$; j) $\frac{2-4x}{3} - \frac{x-2}{4} + \frac{x}{6} = \frac{2(2-3x)}{8}$; k) $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2^2}x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}] = 2$.

**3.** Care dintre perechile $(-5;\sqrt{5})$, $(\sqrt{2};3)$, $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-2;3)$ verifică sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x\sqrt{2} + y = 5 \\ x - y\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{3} \\ 2x - y = 5\sqrt{3} \end{cases}$?

**4.** Colaborați la nivelul clasei și rezolvați fiecare dintre sistemele de două ecuații cu două necunoscute prin diferite metode învățate, apoi prezentați și discutați, formulând concluzii care sprijină învățarea:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6(x+2y) = 4(3y-2x) - 28 \\ -4(x+y) = 2 - 3(x+2y) \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 1 - 3y \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + \frac{10}{y} = 12 \\ 2x - \frac{15}{y} = 17 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = 7 \\ \frac{4}{x} - \frac{6}{y} = -1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x \end{cases}$; g) $\begin{cases} 5|x| + 2|y| = 16 \\ 3|x| - |y| = 3 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} 3|x+2| + 2|y-1| = 17 \\ 2|x+2| - 3|y-1| = 7 \end{cases}$; i) $(x+y+5)(2x-y+4) = 0$;

j) $\begin{cases} y(2x+5) + 3(3y-4x) = 2xy + 1 \\ 3(2x-1) - 2(1-2y) = 0 \end{cases}$; k) $(3x+2y-5)(2x-y-1) = 0$;

l) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-3}{4} + \frac{y}{15} \\ (x+1)^2 - (x+y)^2 + (y+4)^2 = x(4-2y) + 23 \end{cases}$.

**5.** Un pachet cântărește cu 0,6 kg mai mult decât partea ce reprezintă 0,6 din el. Cât cântărește pachetul?

**6.** Perimetrul unui triunghi este de 12 cm, iar lungimile laturilor sunt exprimate prin numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor.

**7.** Perimetrul unui triunghi isoscel este de 48 cm, iar o latură are lungimea de 14 cm. Aflați lungimile celorlalte două laturi.

**8.** Peste 10 ani vârsta Mariei va fi de două ori mai mare decât vârsta pe care a avut-o acum 2 ani. Ce vârstă are acum Maria?

**9.** Un unghi exterior al unui triunghi isoscel are măsura de $100^\circ$. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

**10.** Două dintre unghiurile unui paralelogram au măsurile exprimate prin două numere naturale consecutive pare. Aflați măsurile tuturor unghiurilor paralelogramului.

**11.** Într-un bidon sunt 35 *l* de apă, iar în altul 10 *l* de apă. Dacă adăugăm o aceeași cantitate de apă în cele două bidoane, va fi de 3 ori mai puțină apă în al doilea bidon decât în primul. Care este cantitatea de apă adăugată?

**12.** În urmă cu cinci ani, tripleții Marius, Codrin și Petru, împreună cu sora lor cu 5 ani mai mare, aveau împreună 13 ani. Ce vârstă are Petru astăzi?



**13.** Dacă dragonul roșu ar avea cu 7 capete mai mult decât cel verde, aceștia ar avea 35 de capete împreună. Dar dragonul roșu are cu 7 capete mai puțin decât dragonul verde. Câte capete are dragonul roșu?

**14.** Un automobil a parcurs o distanță în trei zile, astfel: în prima zi a parcurs 35% din drum, în a doua zi 20 % din distanța rămasă, iar în a treia zi restul de 130 km.
a) Câți kilometri are întreaga distanță?
b) Câți kilometri a parcurs automobilul în fiecare zi?



**15.** Trei membri ai unei familii de iepuri au mâncat împreună 73 de morcovi. Iepuroiul tată a mâncat cu 5 morcovi mai mult decât iepuroaica mamă. Fiul lor, Bunny, a mâncat cu 2 morcovi mai puțin decât jumătate din cât a mâncat mama sa. Câți morcovi a mâncat fiecare?

**16.** Ioana și Raluca și-au propus să rezolve împreună, în vacanță, 100 de probleme. Ioana a rezolvat cu 20% mai multe decât și-a propus, iar Raluca cu 10% mai puține decât și-a propus, astfel încât la sfârșitul vacanței aveau rezolvate 105 probleme.
a) Câte probleme și-a propus fiecare fată să rezolve?
b) Câte probleme a rezolvat fiecare fată?

**17.** Cătălin are în bibliotecă de 9 ori mai multe cărți decât fratele său Ionuț. După ce îi dă lui Ionuț 10 cărți, Cătălin constată că i-au rămas de 5 ori mai multe cărți decât fratelui sau. Câte cărți au împreună cei doi frați?

**18.** Într-un bloc sunt 25 de apartamente cu câte două sau cu câte patru camere, în total având 70 de camere. Câte apartamente de fiecare fel sunt în bloc?

**19.** Într-o clasă sunt 31 de elevi, băieți și fete. Dacă în clasă mai vin 2 fete și pleacă 3 băieți, atunci numărul fetelor devine egal cu dublul numărului băieților. Aflați câți băieți și câte fete erau inițial în clasă.

**20.** Compuneți o problemă care să se rezolve cu ajutorul unei ecuații și două probleme care să se rezolve cu ajutorul sistemelor de ecuații; rezolvați fiecare sistem prin altă metodă.

## TEST DE AUTOEVALUARE

**1.** Coeficienții ecuației $4x + 8 = 0$ sunt ...., necunoscuta este ..... și soluția este ..... .

**2.** Dintre numerele $-5$; $-3{,}2$; $0$; $4$, soluția ecuației $6x + 9 = x - 7$ este numărul .....

**3.** Ecuația $5x + m = 3$, $m$ parametru real, are soluția $x = -1$ pentru $m$ egal cu ... .

**4.** Dintre $(-2;\ 3)$, $(2;-3)$, $(2;3)$, $(-2;\ -3)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} 6x + 5y = -3 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$ perechea ... .

**5.** Ecuația $|2x - 3| = 5$ are soluțiile .....

**6.** Sistemul $\begin{cases} x + \frac{5y-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ 3y - \frac{2x+3}{2} = -\frac{21}{2} \end{cases}$ are soluția .....

**7.** Dacă suma a 10 numere consecutive este 125, atunci cel mai mare număr este...

*Punctaj: problemele 1-5 câte 1p, problemele 6-7 câte 2p. Oficiu: 1p.*

## TESTUL 1

**1.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
a) $2x - 5 = 7x + 15$; b) $\frac{4x-3}{x-1} = \frac{12x+5}{3x+1}$.

**2.** Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + y = 17 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x + 3y) = 5 \\ x = 1 - 2y \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x \end{cases}$.

**3.** Suma a două numere este 137, iar diferența dintre dublul primului număr și triplul celui de al doilea este 99. Aflați numerele.

**4.** Un broker a primit de la un investitor o sumă de bani pentru a cumpăra acțiuni. În prima zi cheltuiește 30% din sumă, a doua zi 40% din sumă, iar a treia zi cheltuiește un sfert din sumă.
a) În ce zi cheltuiește cel mai puțin?
b) Determinați suma, știind că, după cele 3 zile, investitorul a rămas cu 150 lei.

*Punctaj: problema 2 are 3 p, problemele 1, 3, 4 au câte 2 p fiecare. Oficiu: 1p.*

## TESTUL 2

**1.** Dacă din triplul unui număr scădem 4,5 obținem 9. Aflați numărul.

**2.** Dintr-o bucată dreptunghiulară de tablă cu aria de 108 dm$^2$ a fost tăiată o altă bucată dreptunghiulară cu aria de 27 dm$^2$. Aflați dimensiunile bucății inițiale, știind că bucata rămasă are formă de pătrat.

**3.** Alexandra a primit o cutie de bomboane. Ea a mâncat câte cinci bomboane pe zi până când au mai rămas trei. Aflați câte bomboane puteau fi în cutie, știind că numărul lor este cuprins între 40 și 50. Aflați numărul de zile în care Alexandra a mâncat bomboanele.

**4.** La un spectacol s-au vândut 100 de bilete, cu prețuri de 15 lei și de 20 lei. Aflați câte bilete de 20 lei s-au vândut, știind că suma încasată a fost de 1800 lei.

**5.** Determinați două numere, știind că suma dintre 75% din primul și 90% din al doilea este 49,5 și suma dintre 110% din primul și 120% din al doilea este 69,6.

*Punctaj: problema 1 are 1p, problemele 2-5 au câte 2p fiecare. Oficiu: 1p.*

# REPREZENTAREA PERECHILOR DE NUMERE ȘI A PUNCTELOR GEOMETRICE ÎNTR-UN SISTEM DE AXE ORTOGONALE

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fie mulțimile $A = \{1; 2\}$ și $B = \{a; b; c\}$. Cu elementele celor două mulțimi formăm *perechi ordonate*, în care primul element este din mulțimea $A$ și al doilea element este din mulțimea $B$: $(1, a)$; $(1, b)$; $(1, c)$; $(2, a)$; $(2, b)(2, c)$. Mulțimea acestor perechi ordonate se numește *produsul cartezian* al mulțimilor $A$ și $B$.

DEFINIȚIE

❖ Se numește *produsul cartezian* al mulțimilor $A$ și $B$ mulțimea perechilor ordonate care au primul element din mulțimea $A$ și al doilea element din mulțimea $B$. Notație: $A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}$.

❖ O *pereche ordonată* este o pereche $(x, y)$ în care am fixat pentru fiecare dintre cele două elemente mulțimea din care face parte.

$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x', y = y'$.

$(x, y) \neq (y, x)$. Egalitatea are loc dacă $x = y$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Cu numerele 1 și 2 putem forma două perechi ordonate: (1, 2) și (2, 1), care sunt diferite (din punct de vedere al ordinii). În plus, perechile (1, 2) și (2, 1) sunt diferite de mulțimea {1, 2}. Atenție! Scrierea {2, 2} nu are sens din punctul de vedere al noțiunii de mulțime, dar perechea (2, 2) are sens!

➢ Pentru mulțimile $A = \{1; 2\}$ și $B = \{a; b; c\}$ calculăm $A \times B$ și $B \times A$.

| | $A \times B$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $a$ | | $(1, a)$ | $(2, a)$ |
| $b$ | | $(1, b)$ | $(2, b)$ |
| $c$ | | $(1, c)$ | $(2, c)$ |

| | $B \times A$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $(a, 1)$ | $(b, 1)$ | $(c, 1)$ |
| 2 | | $(a, 2)$ | $(b, 2)$ | $(c, 2)$ |

$A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$ și $B \times A = \{(a, 1); (b, 1); (c, 1); (a, 2); (b, 2); (c, 2)\}$, mulțimi care sunt diferite.

➢ Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{7, 8, 9, 10\}$. Calculați $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ și $B \times B$. Câte elemente are fiecare mulțime obținută?

*Rezolvare.* $A \times B = \{(1, 7); (1, 8); (1, 9); (1, 10); (2, 7); (2, 8); (2, 9); (2, 10); (3, 7); (3, 8); (3, 9); (3, 10)\}$. Mulțimea are 12 elemente.

## OBSERVAȚII

Dacă $A$ este o mulțime finită cu $m$ elemente, iar $B$ este o mulțime finită cu $n$ elemente, atunci $A \times B$ are $m \cdot n$ elemente.

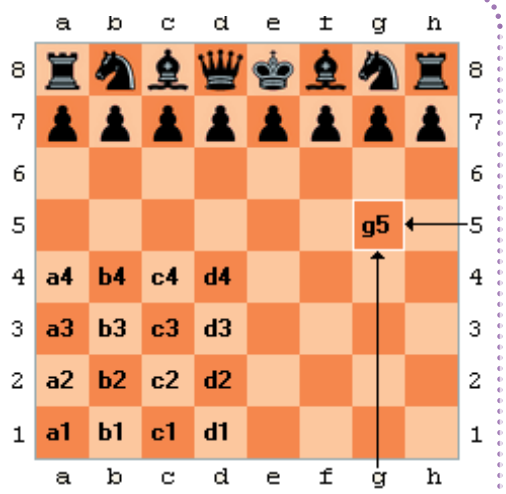
Într-adevăr, cu fiecare element din mulțimea $A$ putem construi $n$ perechi ordonate cu elementele din mulțimea $B$. Cum $A$ are $m$ elemente, numărul total de perechi ordonate este $m \cdot n$.

Putem spune că, în cazul în care $card\, A = m$ și $card\, B = n$, atunci $card(A \times B) = m \cdot n$.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Priviți la tabla de șah din desenul alăturat, care este formată din 64 de pătrate dispuse pe 8 direcții orizontale, numerotate cu cifre de la 1 la 8, respectiv pe 8 direcții verticale, identificate prin litere, de la *a* la *h*. Poziția fiecărui pătrat al tablei de șah corespunde locului de întâlnire a unei direcții verticale cu una orizontală, deci corespunde unei litere și unei cifre. Astfel, regele negru se află la începutul jocului în pătratul de poziție (*e*, 8), iar calul negru de pe poziția (*b*, 8) poate deschide jocul prin mutarea sa fie pe poziția (a, 6), fie pe poziția (*c*, 6). Găsiți locul pe tabla de șah a fiecărei piese.

Pozițiile pieselor de pe tabla de șah se descriu ca perechi ordonate pe care le găsim în produsul cartezian $A \times B$, al mulțimilor $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.




## DESCOPERIȚI

Am învățat să reprezentăm pe axa numerelor reale orice punct de coordonată *a*, *A*(*a*). Dar dacă avem o pereche ordonată de numere reale, o putem reprezenta?

## NE AMINTIM!

Ansamblul format dintr-o dreaptă numită direcție, un punct pe dreaptă (notat cu *O*) numit origine, un sens și o unitate de măsură determină *axa numerelor reale*.

Oricărui număr real *a* îi corespunde pe axă punctul *A*(*a*) și citim „*A* de coordonată *a*”.

## DEFINIȚIE

❖ Se numește *sistem de axe ortogonale* o pereche de două axe perpendiculare care au originea comună. Un sistem de axe ortogonale se notează cu *xOy*.

*O* este originea sistemului de axe și originea fiecărei axe.

Cele două axe au aceeași unitate de măsură.

*Ox* este *axa absciselor* (axa orizontală) și are sensul pozitiv spre dreapta. Punctele acestei axe se numesc abscise.

*Oy* este *axa ordonatelor* (axa verticală) și are sensul pozitiv în sus. Punctele acestei axe se numesc ordonate.

O abscisă și o ordonată formează o pereche de coordonate.

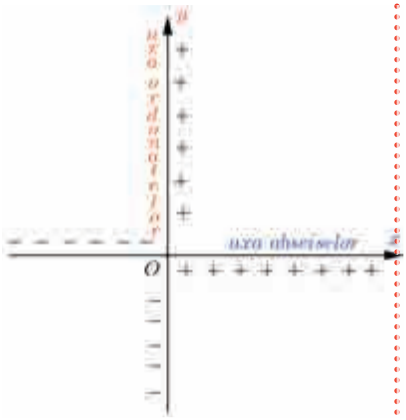
❖ În planul în care s-a fixat un *sistem de coordonate xOy,* oricărei perechi de numere reale (*a*, *b*) îi corespunde un punct în plan, *M*(*a*, *b*), și citim „punctul *M* de coordonate *a* și *b*.”

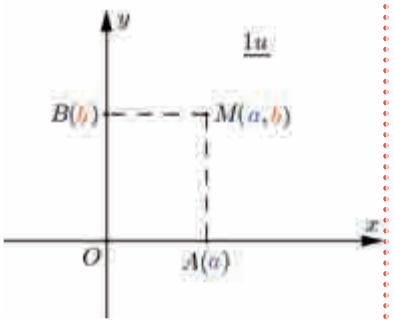
## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Cum reprezentăm punctul $M(a, b)$ într-un sistem de coordonate $xOy$?

❖ Reprezentăm pe axa abscselor, $Ox$, punctul de coordonată (abscisă) $a$, $A(a)$ și pe axa ordonatelor, $Oy$, punctul de coordonate (ordonată) $b$, $B(b)$.

❖ Prin punctul $A$ ducem o paralelă, punctată, la $Oy$. Prin punctul $B$ ducem o paralelă, punctată, la $Ox$. Punctul aflat la intersecția celor două drepte punctate este punctul $M(a, b)$.



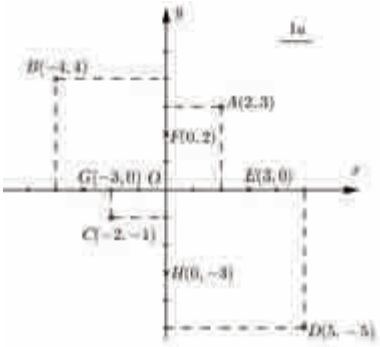

❖ Fie punctul $M$ în planul în care s-a fixat un sistem de coordonate $xOy$. Determinăm perechea sa de coordonate: ducem o paralelă la $Oy$, prin punctul $M$, care intersectează axa $Ox$ în $A(a)$, deci punctul $M$ are abscisa $a$; ducem apoi o paralelă la $Oy$, prin punctul $M$, care intersectează axa $Oy$ în $B(b)$, deci punctul $M$ are ordonata $b$. Punctului $M$ îi corespunde perechea de numere $(a, b)$, deci $M(a, b)$.

❖ Oricărei perechi $(a, b)$ îi corespunde un unic punct în plan și oricărui punct în plan îi corespunde o unică pereche din produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Spunem că planul se identifică cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## DESCOPERIȚI

Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(2, 3)$; $B(-4, 4)$; $C(-2, -1)$; $D(5, -5)$; $E(3, 0)$; $F(0, 2)$; $G(-3, 0)$; $H(0, -3)$.

Discutați la nivelul clasei particularitățile punctelor $E$, $F$, $G$ și $H$. Formulați concluzii care sprijină învățarea.




## OBSERVAȚII

Planul în care este reprezentat un sistem de axe ortogonale este împărțit (de cele două axe) în 4 zone, numite *cadrane*, notate în sens invers sensului de rotire a acelor de ceasornic cu cifre romane.

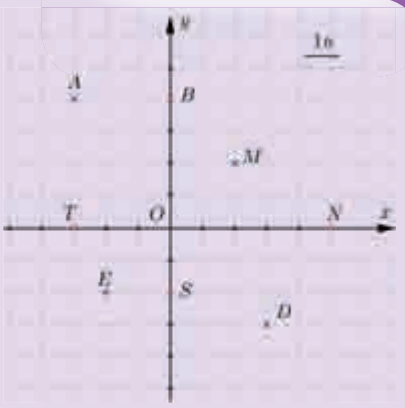



❖ Punctele reprezentate în cadranul I au ambele coordonate pozitive.
❖ Punctele reprezentate în cadranul II au abscisa negativă și ordonata pozitivă.
❖ Punctele reprezentate în cadranul III au ambele coordonate negative.
❖ Punctele reprezentate în cadranul IV au abscisa pozitivă și ordonata negativă.
❖ Orice punct situat pe axa abscselor are ordonata egală cu 0.
❖ Orice punct situat pe axa ordonatelor are abscisa egală cu 0.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Determinați coordonatele punctelor din figura alăturată și completați tabelul după model:

| Punct | $A$ | $B$ | $O$ | $T$ | $E$ | $S$ | $D$ | $M$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisa | −3 | 0 | | | | | | | |
| Ordonata | 4 | 4 | | | | | | | |
| Cadranul sau axa | II | $Oy$ | | | | | | | |




➢ Determinați produsul cartezian al mulțimilor: $A = \{1; 3\}$ și $B = \{1; 2; 4\}$.

*Rezolvare.* $A \times B = \{(1,1); (1,2); (1,4); (3,1); (3,2); (3,4)\}$.

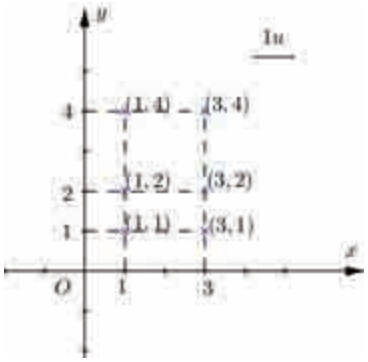
## ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul „cartezian” provine de la numele latinizat (Cartesius) al lui René Descartes, filozof, matematician și fizician francez; el a introdus aceste coordonate în anul 1637.

În onoarea marelui matematician, sistemul de axe ortogonale mai poartă numele de *reper cartezian*.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Un alt mod de reprezentare a produsului cartezian este *diagrama cartezianăă*.




Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale numerele din mulțimea $A$ pe axa $Ox$ și numerele din mulțimea $B$ pe axa $Oy$. Ducem prin punctele reprezentate pe $Ox$ drepte paralele cu axa $Oy$ și prin punctele reprezentate pe $Oy$ drepte paralele cu $Ox$. Punctele de intersecție ale acestor paralele au drept perechi de coordonate elementele produsului cartezian.

## DESCOPERIȚI

Citiți cu atenție scrierea $\{(-2, 2); (-2, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 2)\}$. Poate reprezenta această scriere o mulțime de tip produs cartezian?

Comparați la nivelul clasei argumentele și formulați concluzii utile învățării!

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Aflați, în fiecare caz, mulțimile $A$ și $B$, știind că:

a) $A \times B = \{(-1,5); (-1,7); (1,5); (1,7); (3,5); (3,7)\}$.

b) $A \times B = \{(0,0); (0,1); (0,2); (1,0); (1,1); (1,2); (2,0); (2,1); (2,2)\}$.

*Rezolvare.*

a) Primul element al fiecărei perechi din produsul cartezian este din prima mulțime, $A$, iar al doilea element al fiecărei perechi este din a doua mulțime, $B$; $A = \{-1; 1; 3\}$ și $B = \{5; 7\}$.

b) Obținem $A = B = \{0; 1; 2\}$.

## EXERSAȚI

**1.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-2, 2)$; $B(-5, -4)$; $C(-6, 3)$; $D(4, -5)$; $E(6, 1)$; $F(0, -4)$; $G(-6, 0)$; $H(0, -5)$.

**2.** Determinați $A \times B$; $B \times A$; $A \times A$; $B \times B$ și cardinalul acestora, știind că $A = \{1; 5\}$ și $B = \{-2; 0\}$.

**3.** Determinați $A \times B$; $B \times A$; $A \times A$; $B \times B$, știind că $A = \{-3; -1; 1; 3; 5\}$ și $B = \{-2; 0; 2; 4\}$. Aflați cardinalul fiecărui produs cartezian găsit.

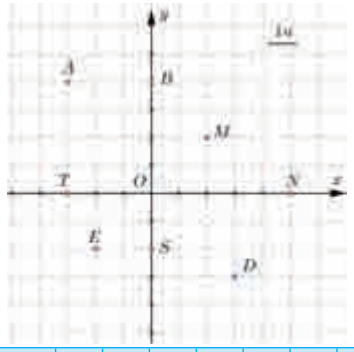
**4.** Pentru mulțimile $A = \{-2; 3\}$ și $B = \{-1; 2\}$ determinați $A \times B$; $B \times A$; $A \times A$; $B \times B$ și realizați în fiecare caz diagrama cartezianăă.

**5.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-2; 4)$; $B(3; -3)$; $C(3; 2)$; $D(-5; -4)$; $E(-4; -3)$ și precizați în ce cadrane se află fiecare.

**6.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-2; 5)$; $B(0; -4)$; $C(1; 4)$; $D(5; 0)$; $E(-6; -4)$; $F(2; -3)$; $G(-3; 0)$; $H(0; 2)$ și specificați care puncte sunt pe axele de coordonate.

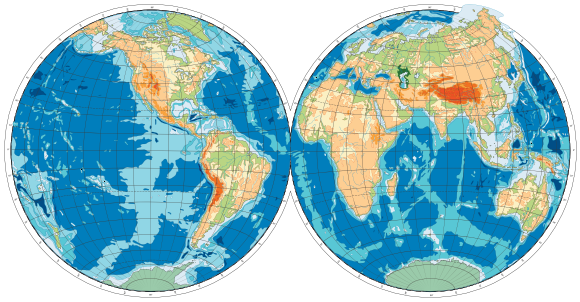
**7.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale, în care luați unitatea de măsură de 1 cm, următoarele puncte: $A\left(2\frac{1}{2}; 4\right)$; $B\left(-1; 3\frac{1}{3}\right)$; $C(-\sqrt{2}; -\sqrt{3})$; $D(0; -4,5)$; $E(3,25; -\sqrt{5})$; $F(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $G(-5; 0)$.

**8.** Determinați coordonatele punctelor din figura alăturată și completați următorul tabel:




| Punct | $A$ | $B$ | $O$ | $E$ | $T$ | $S$ | $D$ | $N$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisa | | | | | | | | | |
| Ordonata | | | | | | | | | |
| Cadran / axă | | | | | | | | | |

## PORTOFOLIU



Ați învățat la geografie despre latitudine și longitudine. Acestea formează un sistem de coordonate geografice care permit localizarea cu precizie a oricărui punct pe suprafața Pământului. Coordonatele geografice nu se exprimă prin unități de lungime, ci prin unități de măsură ale unghiurilor. Latitudinea și longitudinea sunt exprimate în grade, minute și secunde.

Realizați un referat despre coordonatele geografice (istoric, personalități, curiozități etc). Formați echipe la nivelul clasei și stabiliți trasee de călătorie care să aibă ca punct de plecare localitatea voastră și încă 10 localități (destinații).

Folosind fie hărți turistice, fie aplicații online, realizați un tabel cu informațiile privind coordonatele geografice ale localităților de pe traseu. Comparați traseele și coordonatele identificate. Asociați acestui proiect alte 4 cerințe interdisciplinare!

# DISTANȚA DINTRE DOUĂ PUNCTE DIN PLAN

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Într-un sistem de axe ortogonale, cu unitatea de măsură de 1 cm, desenați punctele $A(1; 0)$, $B(5; 0)$ și $C(-3; 0)$. Măsurați cu rigla gradată distanța dintre $A$ și $B$, dintre $A$ și $C$ și dintre $C$ și $B$, apoi verificați prin calcule valorile obținute.

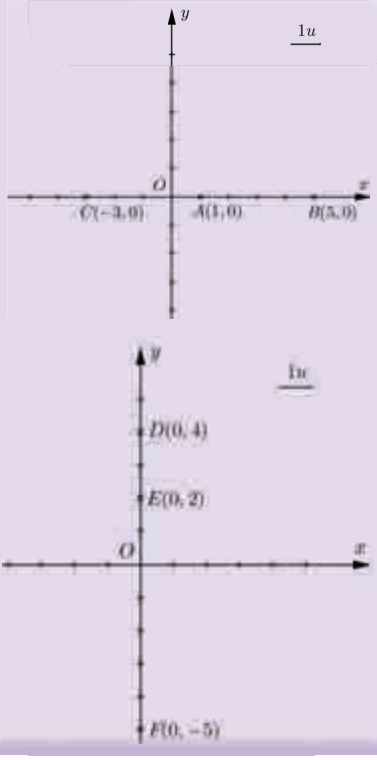
*Rezolvare:* Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt pe axa $Ox$ și $OA = 1$, $OB = 5$, $OC = 3$ (unități de măsură). Observăm în desen că între punctele $A$ și $B$ unitatea de măsură este reprezentată de 4 ori, deci segmentul $AB$ are lungimea de 4 cm: $AB = OB - OA$.

Între punctele $A$ și $C$ unitatea de măsură este reprezentată de 4 ori, deci segmentul $AC$ are lungimea de 4 cm: $AC = 1 + 3 = 1 - (-3) = |(-3) - 1|$ cm. Dacă $A(x_A,0)$ și $C(x_C,0)$, putem spune că $AC = |x_C - x_A|$.

Între punctele $C$ și $B$ unitatea de măsură este reprezentată de 8 ori, deci segmentul $CB$ are lungimea de 8 cm: $CB = OB + OC = 5 + 3 = 8$. Dacă $B(x_B,0)$ și $C(x_C,0)$, putem spune că $CB = |x_B - x_C|$.

➢ Într-un sistem de axe ortogonale, cu unitatea de măsură de 1 cm, desenați punctele $D(0; 4)$ și $E(0; 2)$. Măsurați distanța dintre $D$ și $E$ și verificați prin calcule valorile obținute.

*Rezolvare.* Punctele $D$ și $E$ sunt pe axa $Oy$ și $OD = 4$, $OC = 2$ (unități de măsură). Observăm în desen că între punctele $D$ și $E$ unitatea de măsură este reprezentată de 2 ori, deci segmentul $DE$ are lungimea de 2 cm. Dacă $D(0,y_D)$ și $E(0,y_E)$, putem spune că $DE = |y_E - y_D|$.



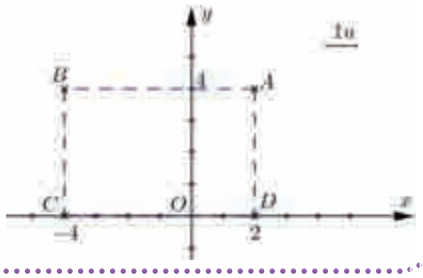

**DEFINIȚIE**

Fie punctele $A(x_A,0)$ și $B(x_B,0)$ pe axa $Ox$. Distanța de la $A$ la $B$ este lungimea segmentului $AB$ și este egală cu $AB = |x_B - x_A|$.

Fie punctele $C(0,y_C)$ și $D(0,y_D)$ pe axa $Oy$. Distanța de la $C$ la $D$ este lungimea segmentului $CD$ și este egală cu $CD = |y_D - y_C|$.

## DESCOPERIȚI

Priviți desenul alăturat și discutați la nivelul clasei legătura dintre lungimea segmentului $AB$ și cea a segmentului $CD$. Formulați o concluzie generală referitoare la modul în care se calculează distanța dintre două puncte care au ordonatele egale. Studiați și situația în care două puncte au abscisele egale!

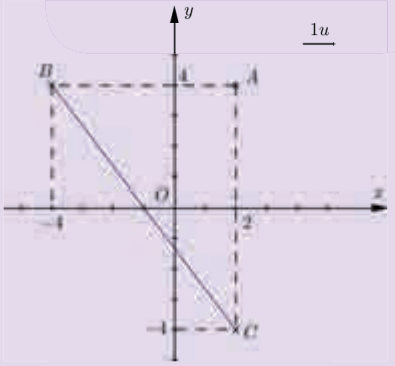


## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Într-un sistem de axe ortogonale, cu unitatea de măsură de 1 cm, desenați punctele $B(-4; 4)$ și $C(2; -4)$. Măsurați distanța dintre $B$ și $C$ și verificați prin calcule valoarea obținută.

*Rezolvare.*

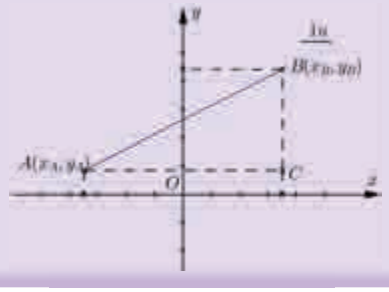
Ducem prin $B$ o paralelă la axa $Ox$ și prin $C$ o paralelă la axa $Oy$; cele două paralele se întâlnesc în punctul $A(2; 4)$. Triunghiul $ABC$ este un triunghi dreptunghic cu laturile $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul $ABC$ și obținem $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm.




➢ Într-un sistem de axe ortogonal desenați punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$. Calculați lungimea segmentului $AB$.

*Rezolvare.*

Ducem prin $A$ o paralelă la axa $Ox$ și prin $B$ o paralelă la axa $Oy$. Cele două paralele se întâlnesc în punctul $C(x_C, y_C)$, unde $x_C = |x_B - x_A|$ și $y_C = |y_B - y_A|$. Triunghiul $ABC$ este un triunghi dreptunghic în $C$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul $ABC$ și obținem $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.




**PROPRIETATE**

În raport cu un sistem de axe ortogonale $xOy$, lungimea segmentului $AB$, $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ este egală cu $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Demonstrați că punctele $A(-1; 6)$, $B(2; -9)$ și $C(0; 1)$ sunt coliniare.

*Rezolvare.* Desenăm punctele într-un sistem ortogonal cu unitatea de măsură de 1 cm. Calculăm lungimile segmentelor $AB$, $AC$ și $BC$ și obținem $AB = 3\sqrt{26}$ cm, $AC = \sqrt{26}$ cm și $BC = 2\sqrt{26}$ cm. Putem scrie $AC + BC = AB$, de unde obținem că punctele $A - C - B$ sunt coliniare în această ordine.

➢ Desenați într-un sistem de axe ortogonale $xOy$, cu unitatea de măsură de 1 cm, punctele $A(-1; 3)$, $B(2; -1)$ și $C(-2; -4)$. Calculați perimetrul triunghiului $ABC$. Arătați că triunghiul $ABC$ este dreptunghic isoscel.

*Rezolvare.* $P_{ABC} = AB + BC + CA$. Calculăm lungimile laturilor triunghiului:

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, $AB = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ cm;

$BC = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-4 + 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ cm;

$CA = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (3 + 4)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm; $P_{ABC} = 10 + 5\sqrt{2}$ cm.

Cum $AB = BC$, am obținut că triunghiul $ABC$ este isoscel. Pentru a arăta că triunghiul este dreptunghic, verificăm reciproca teoremei lui Pitagora: $5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2$, adică $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Obținem că triunghiul $ABC$ are unghiul $B$ drept.

**IMPORTANT**

➢ Calculați coordonatele mijlocului segmentului $AB$, unde $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$.

*Rezolvare.*

Notăm cu $M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului $AB$. Folosind notațiile din desen, $AFHB$ este trapez dreptunghic și $MG$ este linia sa mijlocie (demonstrează aceste afirmații):

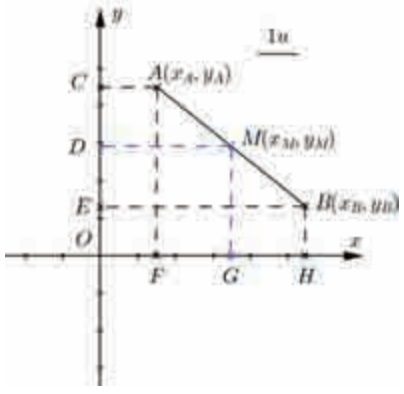
$y_M = MG = \frac{BH + AF}{2} = \frac{y_B + y_A}{2}$.

Analog, $ACEB$ este trapez dreptunghic și $MD$ este linia sa mijlocie:

$x_M = MD = \frac{AC + BE}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Așadar, mijlocul $M$ al segmentului $AB$, unde $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, are coordonatele

$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.



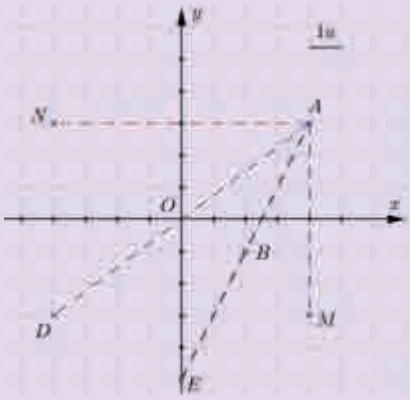

➢ Desenați într-un sistem de axe ortogonale $xOy$, cu unitatea de măsură de 1 cm, punctele $A(-3; 4)$, $B(-5; -4)$ și $C(1; -2)$. Calculați lungimile laturilor triunghiului $ABC$ și lungimile medianelor triunghiului.

*Rezolvare.* Calculăm lungimile laturilor: $AB = 2\sqrt{17}$ cm, $BC = 2\sqrt{10}$ cm, $AC = 2\sqrt{13}$ cm. Pentru a calcula lungimile medianelor, aflăm întâi coordonatele mijloacelor laturilor, utilizând formula de calcul evidențiată alăturat: $M(-4; 0)$ mijlocul lui $AB$, $N(-2; -3)$ mijlocul lui $BC$ și $P(-1; 1)$ mijlocul lui $AC$. Lungimile medianelor sunt: $AN = 5\sqrt{2}$ cm, $BP = \sqrt{41}$ cm, $CM = \sqrt{29}$ cm.

➢ Desenați într-un sistem de axe ortogonale $xOy$, cu unitatea de măsură de 1 cm, punctele $A(4; 3)$, $B(4; -2)$, $C(-2; -2)$ și $D(-2; 3)$. Arătați că $ABCD$ este dreptunghi.

*Rezolvare.* Putem calcula lungimile laturilor și ale diagonalelor, precum și coordonatele mijloacelor diagonalelor. Discutați la nivelul clasei raționamentele făcute, comparați și formulați concluzii care sprijină învățarea!

➢ Desenați într-un sistem de axe ortogonale $xOy$, cu unitatea de măsură de 1 cm, punctele $A(4; 3)$ și $B(2; -1)$. Desenați simetricele punctului $A$ față de originea axelor de coordonate, de axa $Ox$, de axa $Oy$ și de punctul $B$.




*Rezolvare.* Pentru a găsi coordonatele simetricului $D$ al punctului $A$ față de originea axelor de coordonate folosim faptul că punctul $O$ este mijlocul segmentului $AD$. Obținem $D(-4; -3)$. Dacă punctul $N$ este simetricul lui $A$ față de axa $Oy$, atunci $N(-4; 3)$. La fel găsiți celelalte puncte.

➢ Ce fel de patrulater formează punctul $A$ cu cele trei simetrice ale sale față de originea axelor de coordonate, de axa $Ox$ și de axa $Oy$, dacă acestea sunt vârfurile patrulaterului?

Ce proprietate trebuie să aibă coordonatele unui punct, pentru ca patrulaterul obținut ca în exemplul precedent să devină pătrat?

## EXERSAȚI

**1.** Desenați într-un sistem de axe ortogonale *xOy*, cu unitatea de măsură de 1 cm, punctele *A*(0, 3), *B*(−2, 5), *C*(−3, 0), *D*(2, 0), *E*(0, −3), *F*(3, 4). Calculați apoi următoarele distanțe: *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, *AE*, *OE*, *DO*, *BF*.

**2.** Desenați într-un sistem de axe ortogonale *xOy*, cu unitatea de măsură de 1 cm, punctele *A*(0, 4), *B*(3, 5), *C*(4, 0), *D*(−2, −6), *M*(−3, −5), *N*(3, 5). Precizați, pentru fiecare punct, cărui cadran îi aparține și calculați apoi următoarele distanțe: *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, *AM*, *OM*, *NO*, *MN*.

**3.** Verificați dacă următoarele puncte sunt coliniare:
a. *A*(−1, 2), *B*(−3, 0) și *C*(4, 7);
b. *A*(5, 3), *B*(1, −3) și *C*(3, 1);
c. *A*(2, 7) , *B*(−1, 1) și *C*(4, 11).

**4.** Punctele *A*(−2, 5), *B*(4, 4), *C*(3, −2) sunt vârfurile unui triunghi *ABC*.
a. Verificați dacă triunghiul este isoscel.
b. Calculați perimetrul triunghiului.

**5.** Calculați lungimile laturilor triunghiului *ABC*, stabiliți natura triunghiului și coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului, știind că:
a. *A*(−2, 1), *B*(2, 5) și *C*(1, 6);
b. *A*(−2, 4), *B*(4, 4) și *C*(1, 0).

**6.** Fie punctele *A*(3, −1) și *M*(2, 3). Determinați coordonatele punctului *B* știind că *M* este mijlocul segmentului *AB*.

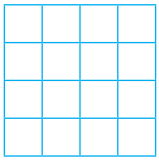
**7.** Punctele *A*(4, 3), *B*(4, 9), *C*(−4, 3) sunt vârfurile unui triunghi *ABC*.
a. Verificați că triunghiul este dreptunghic.
b. Calculați perimetrul triunghiului.
c. Calculați aria triunghiului.
d. Calculați lungimile înălțimilor triunghiului.

**8.** Fie punctele *A*(−4, 3), *B*(2, 6), *C*(3, −4), *D*(0, 5), E(−5, 0).
a. Reprezentați punctele *A, B, C, D, E* într-un sistem de axe ortogonale.
b. Calculați distanțele *AB*, *CD, CE*.
c. Reprezentați punctele următoare și scrieți coordonatele lor:
• punctul *M*, ca fiind simetricul lui *C* față de *Ox*.
• punctul *N*, ca fiind simetricul lui *C* față de *Oy*.
• punctul *P*, ca fiind simetricul lui *C* față de originea sistemului.

**9.** Calculați perimetrul triunghiului *MNP*, unde *M* este mijlocul segmentului *AB*, *N* este mijlocul segmentului *BC*, *P* este mijlocul segmentului *AC* și *A*(−3, 6), *B*(5, 4) și *C*(1, 8).

**10.** Cu ajutorul coordonatelor pătratului *ABCD* determină poziția axelor sistemului ortogonal.

*D*(−2, 2) *C*(2, 2)



*A*(−2, −2) *B*(2, −2)

## ȘTIAȚI CĂ...?

Pe lângă coordonate carteziene și coordonate geografice, mai există și:

• coordonate polare – în care fiecărui punct din plan i se asociază un unghi și o distanță;

• coordonate astronomice – folosite pentru determinarea poziției stelelor sau a altor obiecte astronomice.



# REPREZENTAREA ȘI INTERPRETAREA UNOR DEPENDENȚE FUNCȚIONALE PRIN TABELE, DIAGRAME ȘI GRAFICE. POLIGONUL FRECVENȚELOR

➢ Elevii unei școli participă la serbarea de sfârșit de an școlar astfel: 25 de elevi din clasa a V-a A, 27 de elevi din clasa a V-a B, 32 de elevi din clasa a VI-a A, 30 de elevi din clasa a VI-a B, 28 de elevi din clasa a VII-a A, 29 de elevi din clasa a VII-a B, 30 de elevi din clasa a VIII-a A și 34 de elevi din clasa a VIII-a B. Reprezentați datele într-un tabel.

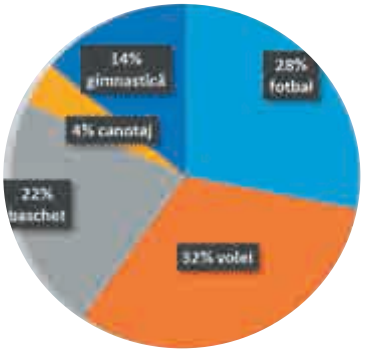
a) Care este clasa cu cea mai mare participare?
b) Din ce clasă au participat cei mai puțini elevi?
c) Câți elevi au participat din clasa a V-a?
d) Care este diferența dintre numărul elevilor de clasa a VIII-a și cel al elevilor de clasa a VII-a care au participat la activitate?
e) Care este media elevilor participanți de clasa a VI-a?
f) Câți elevi au participat în total?

*Rezolvare.* Este util să organizăm datele în tabel.

| Clasa | a V-a A | a V-a B | a VI-a A | a VI-a B | a VII-a A | a VII-a B | a VIII-a A | a VIII-a B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. elevi | 25 | 27 | 32 | 30 | 28 | 29 | 30 | 34 |

a) Din tabelul realizat observăm că cea mai mare participare a fost la clasa a VIII-a B.
b) Clasa cu cea mai mică participare este a V-a A.
c) $25 + 27 = 52$ (elevi) de clasa a V-a.
d) $(30 + 34) - (28 + 29) = 7$ (elevi).
e) $\frac{32 + 30}{2} = 31$ (elevi).
f) 235 elevi participanți

➢ În diagrama alăturată sunt prezentate preferințele, exprimate procentual, a 250 de elevi cu privire la sport.




a) Care este numărul elevilor ce preferă fiecare dintre cele 5 sporturi? Reprezentați datele într-un tabel.
b) Care este numărul elevilor care preferă fotbal *sau* volei?
c) Ce procent din numărul elevilor preferă gimnastică *sau* canotaj?
d) Ce număr de elevi *nu* preferă baschetul?

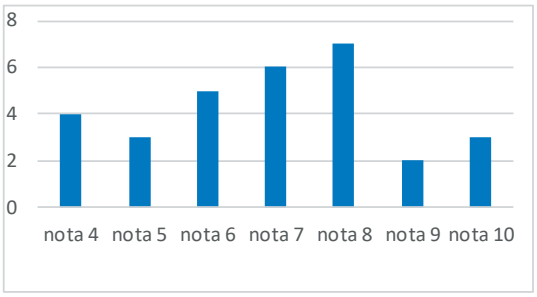
*Rezolvare.* a) Aflăm numărul elevilor care preferă fotbalul astfel: $\frac{28}{100} \cdot 250 = 70$. La fel calculăm pentru fiecare sport preferat.

| Sportul preferat | Fotbal | Volei | Baschet | Canotaj | Gimnastică |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nr. elevi** | 70 | 80 | 55 | 10 | 35 |

b) Numărul elevilor care preferă fotbal *sau* volei este $70 + 80 = 150$ (elevi).
c) Procentul din numărul elevilor care preferă gimnastică *sau* canotaj este $4\% + 14\% = 18\%$.
d) Numărul elevilor care *nu* preferă baschetul este $250 - 55 = 195$ (elevi).

Descoperiți! Am evidențiat în text cuvântul *sau* și negația *nu*. Discutați, la nivelul clasei, implicațiile matematice ale utilizării acestor cuvinte în textul dat și formulați concluzii care sprijină învățarea!

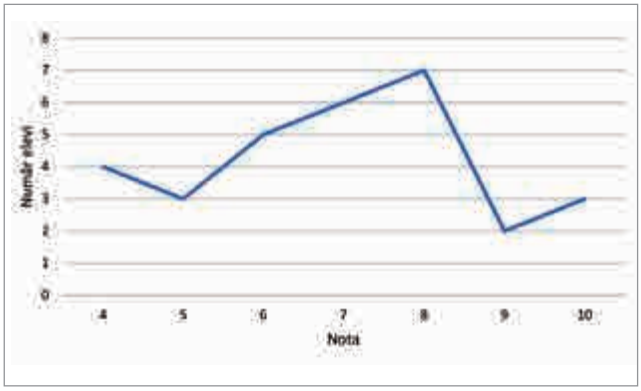
➢ În graficul alăturat sunt prezentate rezultatele obținute de elevi la teza la matematică pe semestrul I al anului școlar. Reprezentați datele într-un tabel.




a) Câți elevi sunt în clasă?
b) Câți elevi au obținut nota 8 la teză?
c) Câți elevi au obținut *cel puțin* nota 7?
d) Câți elevi au obținut *cel mult* nota 6?
e) Calculați media clasei cu două zecimale exacte.
f) Realizați poligonul frecvențelor notelor.

*Rezolvare.*

| Nota | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. elevi | 4 | 3 | 5 | 6 | 7 | 2 | 3 |




a) În clasă sunt 30 de elevi; b) 7 elevi;
c) 6 + 7 + 2 + 3 = 18 (elevi); d) 4 + 3 + 5 = 12 (elevi);
e) Media este 6,9; f) Poligonul frecvențelor este:

**Descoperiți!** Am evidențiat în text expresiile *cel puțin* și *cel mult*. Discutați, la nivelul clasei, implicațiile matematice ale utilizării acestor cuvinte în textul dat și formulați concluzii care sprijină învățarea!

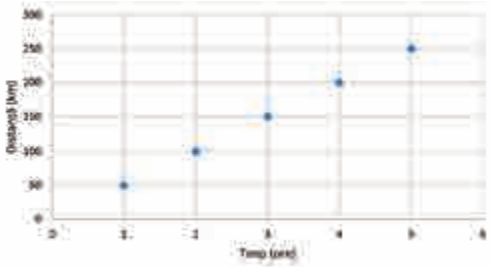
## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că există o *dependență funcțională* de la mulțimea *A* la mulțimea *B*, dacă oricărui element din mulțimea *A* i se asociază un unic element din mulțimea *B*.

O dependență funcțională de la mulțimea *A* la mulțimea *B* se poate reprezenta printr-un tabel, printr-o diagramă sau printr-un grafic.

➢ O mașină se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza de 50 km/h.
a) Scrieți într-un tabel distanțele parcurse după 1, 2, 3, 4, respectiv 5 ore și reprezentați grafic.
b) Calculați distanța parcursă de mobil în primele 90 de minute.
c) Reprezentați grafic mișcarea mobilului.
d) Determinați, cu ajutorul reprezentării grafice, în cât timp parcurge mobilul 300 km.

*Rezolvare.* a) Dacă mașina se deplasează cu 50 km/h, într-o oră parcurge 50 km. Folosind proporționalitatea directă obținem: 1 oră ..... 50 km; 2 ore..... 100 km; 3 ore .... 150 km; ....



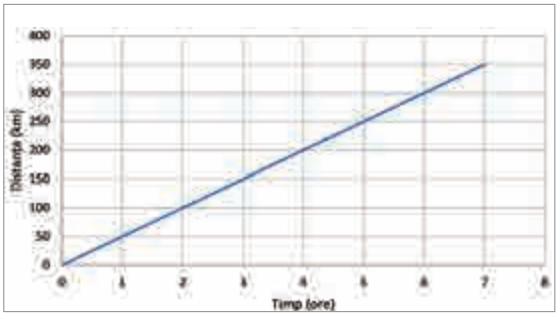
Reprezentăm distanțele în tabel:

| Timp | 1 oră | 2 ore | 3 ore | 4 ore | 5 ore |
|---|---|---|---|---|---|
| Distanță | 50 km | 100 km | 150 km | 200 km | 250 km |

b) Dacă 1 oră = 60 min ..... 50 km
90 min ..... $x$ km, găsim că $x = \frac{90 \cdot 50}{60} = 75$ (km).

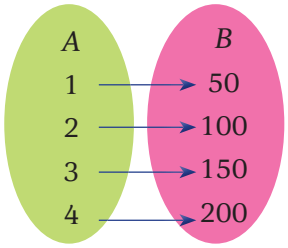
c) Dependența dintre cele două mulțimi este dată de formula vitezei: $v = \frac{d}{t}$ (viteza este raportul dintre distanță și timp). Spunem că avem o lege de corespondență între cele două mulțimi.

Putem considera mulțimea $A = \mathbb{R}_+$ (mulțimea timpilor) și $B = \mathbb{R}_+$ mulțimea distanțelor. Dependența dintre timpul și distanța parcursă de mașină este reprezentată prin graficul alăturat.



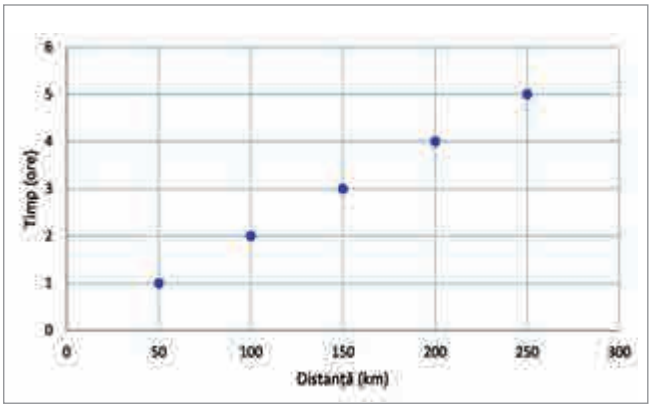

d) De pe reprezentarea grafică deducem că 300 km sunt parcurși de mașină în 6 ore.

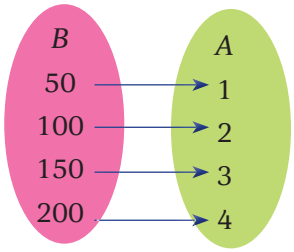
*Observație.*
Pentru exemplul anterior considerăm mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{50, 100, 150, 200, 250\}$.
Am făcut reprezentarea prin tabel și grafic.
Reprezentarea prin diagramă este evidențiată alăturat:




Putem vorbi și despre dependența funcțională de la mulțimea $B$ la mulțimea $A$, pe care o reprezentăm astfel:

| **Distanță** | 50 km | 100 km | 150 km | 200 km | 250 km |
|---|---|---|---|---|---|
| **Timp** | 1 oră | 2 ore | 3 ore | 4 ore | 5 ore |



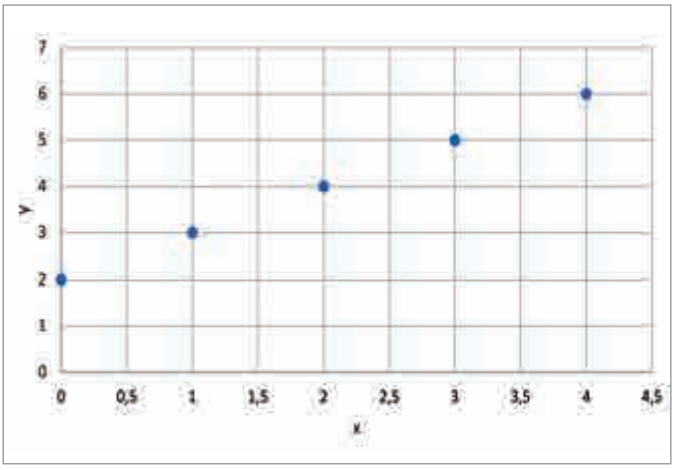




➢ Între $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ avem dependența funcțională $y = x + 2$ (fiecărui element $x$ din $A$ îi corespunde un element din $B$, cu 2 mai mare). Reprezentați dependența funcțională printr-un tabel și printr-un grafic.

*Rezolvare.* Pentru fiecare $x \in A$ calculăm valoarea lui $y$ folosind dependența funcțională: $x = 0$ și $y = 0 + 2 = 2$, $x = 1$ și $y = 1 + 2 = 3$...

Tabelul valorilor obținute este:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |



➢ La Simularea Evaluării Naționale elevii dintr-o școală au obținut următoarele rezultate:

| Clasa | a VII-a A | a VII-a B | a VII-a C | a VII-a D |
|---|---|---|---|---|
| **Media notelor la limba română** | 7,9 | 6,45 | 8,05 | 8,35 |
| **Media notelor la matematică** | 7,35 | 6,65 | 7,95 | 8,05 |

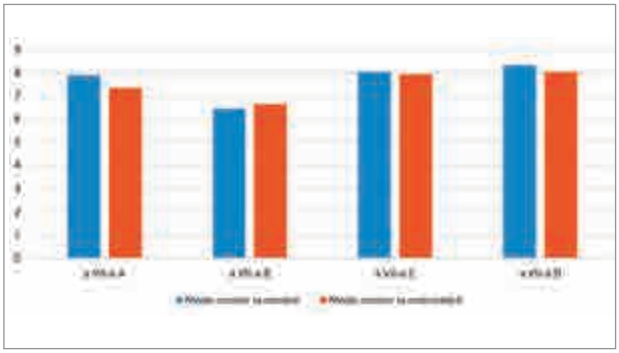
a) Ce clasă a obținut cea mai mare medie a notelor la proba de limba română?
b) Ce clasă a obținut cea mai mică medie a notelor la proba de matematică?
c) Care clasă a obținut media notelor la matematică mai mare decât media notelor de la română și cu cât?
d) Reprezentați grafic rezultatele elevilor, exprimate în medii.

*Rezolvare.* a) Comparând valorile din tabel, spunem că cea mai mare medie a notelor la proba de limba română a fost obținută de clasa a VII-a D.

b) Cea mai mică medie a notelor la proba de matematică a fost obținută de clasa a VII-a B.

c) Clasa a VII-a B are media la matematică mai mare decât media la română cu 6,65 − 6,45 = 0,20.

d) Reprezentarea grafică este:



**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Realizați un tabel cu notele obținute la nivelul clasei voastre la teza pe semestrul I, la matematică. Reprezentați grafic datele strânse în tabel. Care este media clasei? Comparați rezultatele obținute între voi.

**EXERSAȚI**

**1.** Desenați o tablă de șah și fixați: calul alb la poziția A3, regina neagră la poziția B7, regele negru la poziția C5, tura albă la poziția G5, pionul alb la poziția H2, regele alb la poziția F1 și regina albă la poziția E3. Ce piese se găsesc în pătrate albe și ce piese se găsesc în pătrate negre?

**2.** În tabel este reprezentată ordinea decolării avioanelor de pe aeroportul Henri Coandă (București) și timpul de aterizare la destinație, după ora țării în care aterizează avionul. Care este zborul cel mai lung? (Țineți cont și de ora pe glob!)

| Zborul | Timpul decolării | Timpul aterizării |
|---|---|---|
| București – Roma | 7:25 | 8:35 |
| București –Viena | 13:35 | 14:31 |
| București – Atena | 13:45 | 15:30 |
| București – Londra | 16:40 | 17:42 |
| București – Barcelona | 8:30 | 10:40 |

## EXERSAȚI

**3.** În tabelul de mai jos sunt prezentate datele despre cele mai înalte vârfuri montane de pe fiecare continent. Sunt specificate, de asemenea, și lanțurile muntoase cărora le aparțin unele vârfuri, precum și altitudinea acestora.

| Continentul | Vârful | Lanțul muntos | Altitudinea |
|---|---|---|---|
| Europa | Mont Blanc | Alpi | 4 807 m |
| Asia | Everest | Himalaya | 8 848 m |
| Africa | Kilimanjaro | | 5 895 m |
| America de Nord | McKinley | Alaska | 6 194 m |
| America de Sud | Aconcagua | Anzi | 6 960 m |

Completați propozițiile, în baza datelor din tabel.
Cel mai înalt vârf din lume aparține lanțului muntos _____.
Continentul pe care este vârful cu cea mai mică altitudine este _____.
Media celor mai înalte vârfuri muntoase de pe cele 5 continente este _____ .

**4.** Raluca și Anca au făcut o mică investigație. Ele i-au rugat pe 70 de prieteni și prietene să le răspundă la întrebarea: „Câți frați sau surori aveți?“. Rezultatele sondajului le-au notat în tabel (la zero sunt cei care nu au nici frați, nici surori).

| Numărul de frați și surori | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecvența | 13 | 39 | 14 | 3 | 1 |

Reprezentați grafic datele din tabel. Calculați numărul total de frați și surori ai celor 70 de prieteni, apoi calculați și media corespunzătoare.

**5.** În tabel este redată temperatura măsurată dimineața, la Constanța, pe parcursul primei săptămâni din luna martie 2019.

| Ziua | Luni | Marți | Miercuri | Joi | Vineri | Sâmbătă | Duminică |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (°C) | 8,4 | 9,2 | 6,8 | 7,0 | 7,6 | 7,6 | 4,5 |

Reprezentați grafic datele din tabel. Care este media temperaturilor din această săptămână? În ce zi a fost înregistrată cea mai mare temperatură? Dar cea mai mică?

Realizați un studiu în care să măsurați temperatura zilnic, timp de o săptămână, la orele 8, 14 și, respectiv, 20.

**6.** La teza de matematică din semestrul I, dintre elevii unei clase trei elevi au obținut nota 4, patru elevi au obținut nota 5, șase elevi au obținut nota 6, opt elevi au obținut nota 7, șase elevi au obținut nota 8, trei elevi au obținut nota 9, doi elevi au obținut nota 10. La teză nu a absentat niciun elev al clasei, și toți elevii au primit note de minimum 4 și maximum 10. Reprezentați datele obținute la teza la matematică prin cel puțin două metode de organizare a datelor, apoi formulați răspunsuri argumentate la următoarele întrebări:

a) Câți elevi sunt în clasă?
b) Câți elevi au obținut nota 8 la teză?
c) Câți elevi au obținut cel puțin nota 7?
d) Câți elevi au obținut cel mult nota 6?
e) Calculați media clasei cu două zecimale exacte.

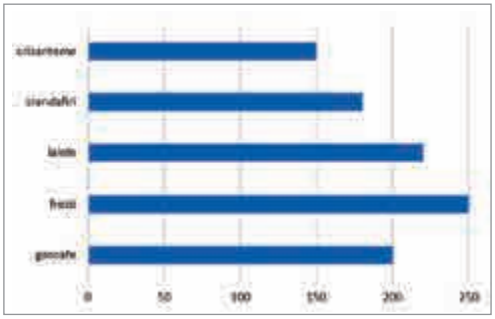
## EXERSAȚI

**7.** Elevii înscriși la clubul de șah au vârstele reprezentate în tabelul de mai jos:

| Vârsta (ani) | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Număr elevi | 8 | 6 | 7 | 4 | 5 |

a) Care este numărul elevilor de la club cu vârsta maximă? Dar cu vârsta minimă?
b) Câți elevi sunt înscriși la club?
c) Care este media vârstei elevilor înscriși la club?
d) Cât la sută reprezintă numărul elevilor cu vârste de 14 și 15 ani din totalul elevilor din club?

**8.** În graficul următor este prezentat numărul de plante comandate de o florărie.

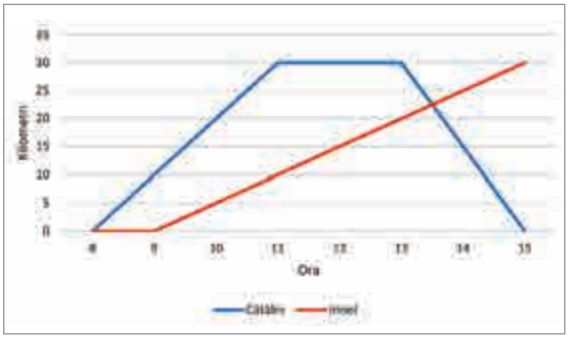


a) Câte fire de lalele s-au comandat? Dar de frezii?
b) Ce flori s-au comandat cel mai puțin? Dar cel mai mult?
c) Ce sumă are de achitat florăria pentru comandă, dacă un fir de crizantemă costă 5,50 lei, un fir de trandafir costă 7 lei, un fir de lalea costă 3 lei, un fir de frezie costă 4,50 lei, iar un fir de garoafă 2,35 lei?

**9.** Într-un an, o brutărie a produs pâine astfel: în luna ianuarie 2 tone de pâine; în luna februarie a mărit producția cu 500 kg; în lunile martie și aprilie producția a rămas la nivelul lunii februarie, în luna mai s-a mărit cu o jumătate de tonă, iar în lunile iunie, iulie și august producția a scăzut, treptat, cu câte 400 kg; în luna septembrie producția a crescut cu 300 kg, iar până la sfârșitul anului a crescut, în fiecare lună, cu câte 200 kg.
a) Reprezintă în cel puțin două moduri producția de pâine a brutăriei în acel an.
b) Câte tone de pâine a produs brutăria în luna octombrie?
c) Care sunt lunile în care producția de pâine a fost sub 2,5 tone?
d) Care este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică producție (date lunare)?

**10.** Mircea a plecat de acasă la ora 8. Primele două ore a mers cu viteza de 3,5 km/h, apoi s-a odihnit pe parcursul a 1,5 h. Odihnit, a revenit acasă, mergând cu viteza de 5 km/h. Reprezintă, pe grafic, deplasarea lui Mircea. La ce oră a ajuns acasă?

**11.** Cătălin, a mers cu bicicleta din localitatea A în localitatea B și înapoi. La o oră după plecarea lui Cătălin a pornit și Irinel, pe același traseu. Diagrama prezintă distanța fiecăruia față de localitatea A, în funcție de timp.




a) La ce oră a ajuns Cătălin în localitatea B, dacă a plecat la ora 8:00?
b) La ce oră l-a întâlnit Cătălin pe Irinel?
c) Câți kilometri a făcut Cătălin până la întâlnirea cu Irinel?

Completați:
a) Cătălin a ajuns în localitatea B la ora __ și __ minute.
b) Cătălin l-a întâlnit pe Irinel la ora __ și __ minute.
c) Cătălin a făcut __ kilometri până la întâlnirea cu Irinel.

**1.** Calculați $A \times B$; $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ și cardinalul acestora, știind că $A = \{-2; 2\}$ și $B = \{-1; 1\}$. Reprezentați mulțimile găsite în câte un sistem de axe ortogonale.

**2.** Calculați $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$, știind că $A = \{0; 1; 2; 3\}$ și $B = \{-3; -2; -1; 0\}$. Aflați cardinalul fiecărui produs cartezian găsit.

**3.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(0, -2)$; $B(-4, -4)$; $C(-6, 0)$; $D(4, 0)$; $E(3, 2)$; $F(5, -1)$; $G(-6, 3)$; $H(0, 5)$. Precizați în ce cadrane se află fiecare punct și care puncte sunt pe axele de coordonate.

**4.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele:

| Punct | $A$ | $B$ | $E$ | $T$ | $S$ | $D$ | $N$ | $M$ | $O$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisa | $-4$ | $-2$ | 2 | $-3$ | 0 | 0 | 3 | 4 | 0 |
| Ordonata | $-2$ | 2 | 4 | 0 | 3 | 1,5 | 3 | 2 | 0 |

Precizați ce serie de câte 3 puncte sunt coliniare și care puncte sunt mijloacele unor segmente din desen.

**5.** Verificați dacă următoarele puncte sunt coliniare:
a. $A(-5, 2)$, $B(0, 2)$ și $C(4, 5)$. b. $A(1, -3)$, $B(1, 1)$ și $C(3, 1)$. c. $A(4, 7)$, $B(-2, 1)$ și $C(1, 4)$.

**6.** Punctele $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(1, 3)$ sunt vârfurile unui triunghi $ABC$.
a. Verificați dacă triunghiul este isoscel. b. Calculați aria și perimetrul triunghiului.

**7.** Punctele $A(-4, 1)$, $B(6, 1)$, $C(1, 1 + 5\sqrt{3})$ sunt vârfurile unui triunghi $ABC$.
a. Verificați dacă triunghiul este echilateral. b. Calculați aria și perimetrul triunghiului.

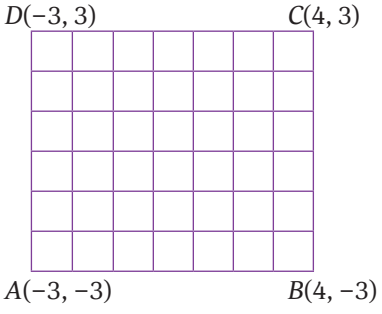
**8.** Punctele $A(-4, 1)$, $B(-1, 14)$, $C(-1, 5)$ sunt vârfurile unui triunghi $ABC$.
a. Verificați dacă triunghiul este dreptunghic.
b. Calculați aria și perimetrul triunghiului.

**9.** Punctul $S$ este mijlocul segmentului $AB$, unde $A(6, 2)$ și $B(2, 6)$. Care este distanța dintre mijlocul segmentului $BS$ și originea sistemului de axe?

**10.** Latura rombului $ABCD$ are lungimea de cinci segmente unitare, iar $AC$ este diagonala mai lungă a rombului. Determinați coordonatele punctelor $B$ și $D$, astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie romb, știind că originea axelor este intersecția diagonalelor.

**11.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctul $A(4, 2)$. Determinați coordonatele punctelor $B$, $C$ și $D$, dacă se știe că punctul $B$ este simetricul punctului $A$ în raport cu axa $Ox$, punctul $C$ este simetricul punctului $B$ în raport cu axa $Oy$ și $D$ este simetricul punctului $C$ față de originea axelor.

**12.** Cu ajutorul coordonatelor vârfurilor dreptunghiului $ABCD$ reprezentat prin desen, determinați poziția axelor sistemului cartezian.




**13.** Desenați toate punctele care au valoarea absolută a coordonatelor de două ori mai mare decât valoarea absolută a coordonatelor punctului $A(-2, -3)$.

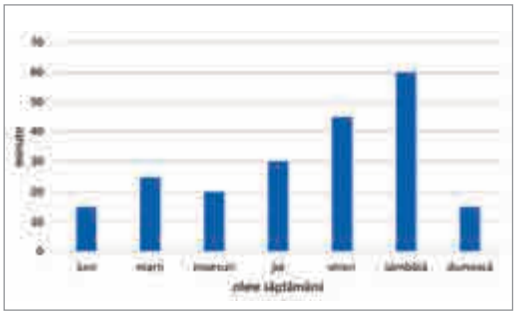
**14.** *Încercuiți litera din fața răspunsului corect.*

Simetricul punctului $A(-3, -5)$, față de axa $Oy$ este:

a) în cadranul întâi; b) în cadranul al doilea; c) în cadranul al treilea; d) în cadranul al patrulea.

**15.** Desenați într-un sistem de axe ortogonale triunghiul $ABC$, știind că $A(2, 3)$, $B(4, 0)$ și $C(2, -1)$. Desenați triunghiul $MNP$ care este simetricul triunghiului $ABC$ față de axa $Oy$. Ce coordonate au punctele $M$, $N$ și $P$?

**16.** Graficul alăturat reprezintă timpul, exprimat în minute, pe care l-a petrecut Rareș învățând la matematică. Cât timp și-a petrecut învățând la matematică, în cele șapte zile? În ce zi a învățat cel mai mult, ca timp? Dar cel mai puțin?



**17.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei școli după notele obținute la un concurs.

a) Numărul elevilor care au obținut o notă mai mică decât 7 este ...

b) Ce notă are frecvența cea mai mare?

c) Reprezentați datele într-un grafic cu bare.

d) Aflați procentul notelor, pe fiecare tranșă, și reprezentați printr-o diagramă circulară datele obținute.

| **Note** | Mai mici decât 5 | 5-5,99 | 6-6,99 | 7-7,99 | 8-8,99 | 9-9,99 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nr. elevi** | 8 | 12 | 25 | 20 | 15 | 13 | 7 |

**18.** Jucătoarele din echipa de volei a unei școli au următoarele înălțimi exprimate în centimetri: 169, 170, 165, 172, 168, 173, 176, 180, 170, 167, 164, 174. Completați tabelul în baza datelor de mai sus.

| **Înălțimea** | Sub 165 cm | 165 cm – 168 cm | 169 cm – 172 cm | 173 cm – 175 cm | 176 cm – 178 cm | Peste 178 cm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numărul de jucătoare** | | | | | | |

**19.** La întrebarea „Câte ore urmăriți programul la televizor?“, elevii au răspuns pe rând: 2 ore, 2,5 ore, 3 ore, 1 oră, 1,5 ore, 2 ore, 1 oră, 2,5 ore, 4 ore, 3 ore, 1 oră, 0,5 ore. Completați tabelul, în baza datelor obținute.

| **Numărul de ore (h)** | mai puțin de 1 oră | între 1 oră și 2 ore | între 2 ore și 3 ore | mai mult de 3 ore |
|---|---|---|---|---|
| **Numărul de elevi** | | | | |

Reprezentați grafic datele.

**20.** În tabel sunt prezentate date despre frecvența prezenței copiilor în localul pentru joacă dintr-un parc, pe parcursul unei săptămâni.

| **Ziua** | Luni | Marți | Miercuri | Joi | Vineri | Sâmbătă | Duminică |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numărul de copii** | 72 | 54 | 64 | 78 | 147 | 251 | 194 |

a) Care este valoarea medie pentru datele prezentate?

b) Reprezentați grafic datele.

## TESTUL 1 – A ȘTI

**1.** Definiți un sistem de axe ortogonale.

**2.** Desenați un sistem de axe ortogonale și evidențiați axa absciselor și axa ordonatelor.

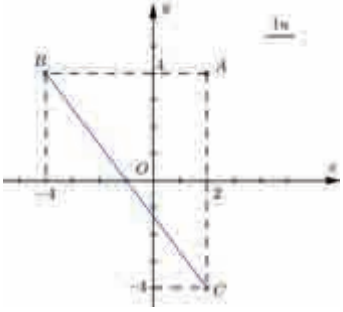
**3.** Cum se numesc cele 4 regiuni în care împart planul cele două axe și prin ce se deosebesc?

**4.** Care este formula distanței dintre două puncte în plan?

**5.** Care este formula pentru coordonatele mijlocului unui segment într-un reper cartezian?

*Punctaj: 2p; 2p; 2p; 1,5p; 1,5p. Oficiu: 1p.*

## TESTUL 2 – A APLICA



**1.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonal punctele: $A(1, -2)$, $B(-5, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-2, 3)$, $E(-3, -6)$ și $F(4, 0)$. Determinați coordonatele punctelor: $M$ – mijlocul segmentului $AC$, $N$ – mijlocul segmentului $BD$, $P$ – mijlocul segmentului $EF$.

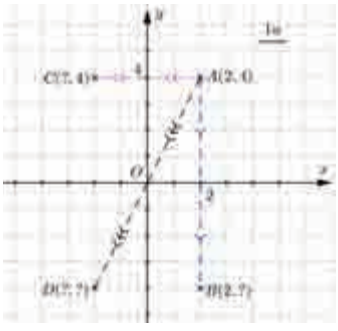
**2.** Calculați aria și perimetrul triunghiului $ABC$ din figura alăturată.

**3.** Maria merge la *mall* și notează prețurile într-un tabel. A doua zi constată că prețurile s-au redus la haine cu 20% și la încălțăminte cu 15% și completează tabelul cu noile prețuri. Ce economie ar face Maria dacă ar cumpăra câte un produs din fiecare la prețurile reduse, față de prețurile nereduse? Comparați raționamentele făcute la nivelul clasei. Există variante de rezolvare? Dacă da, notați-vă concluzii care întăresc învățarea! Reprezentați grafic datele din tabel.

| **Produs** | Blugi | Tricou | Sandale | TenișI | Sacou |
|---|---|---|---|---|---|
| **Preț** | 75 lei | 30 lei | 90 lei | 50 lei | 100 lei |
| **Preț redus** | | | | | |

*Punctaj: 3p; 3p; 3p. Oficiu: 1p.*

## TESTUL 3 – A APLICA



**1.** În figura alăturată punctele $B$, $C$ și $D$ sunt simetricele punctului $A$ față de axele de coordonate și față de originea axelor. Aflați coordonatele punctelor.

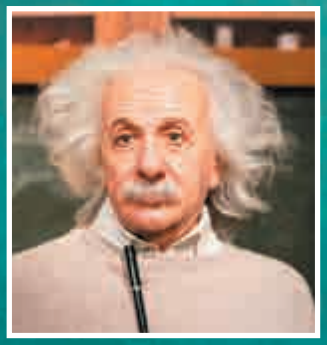
**2.** Calculați aria și perimetrul triunghiului $ABC$ dacă $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$ și $C(5, -1)$.

**3.** Ioana măsoară timp de o săptămână, temperaturile corespunzătoare zilelor de august. Luni, la ora 8, temperatura este de 18°, la ora 14 este de 30° și la ora 20 este de 28°. În fiecare zi temperaturile cresc cu câte 1° la fiecare înregistrare față de înregistrările zilei anterioare. Realizați un tabel cu temperaturile corespunzătoare celor 3 ore, pentru toată săptămâna. Calculați media temperaturilor pentru fiecare oră studiată, pe parcursul întregii săptămâni. Reprezentați grafic datele.

*Punctaj: 3p; 3p; 3p. Oficiu: 1p.*

# GEOMETRIE





**Baletul este o formă perfect geometrică. Balerinele sunt geometriile perfecte ale Creatorului.**

**Albert Einstein**
**1879–1955**

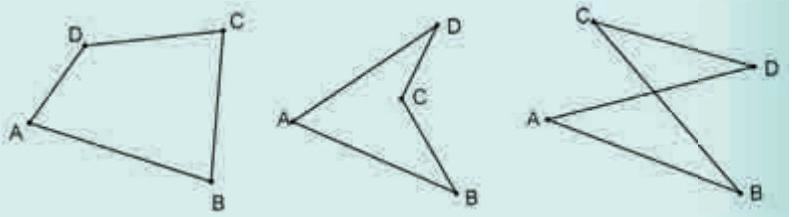
# PATRULATERUL CONVEX. SUMA MĂSURILOR UNGHIURILOR UNUI PATRULATER CONVEX

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Desenați punctele necoliniare și distincte $A$, $B$ și $C$ și segmentele determinate de câte două dintre cele trei puncte. Obțineți astfel un triunghi, $\Delta ABC$.

➢ Desenați patru puncte distincte, $A$, $B$, $C$ și $D$, astfel încât oricare trei să fie necoliniare și, dacă formăm segmentele $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$, oricare două dintre acestea să nu aibă puncte interioare comune.

*Rezolvare.* În figura următoare, primele două desene respectă cerința, iar al treilea desen nu.




➢ Reluați cerința anterioară pentru 5 puncte, respectiv pentru 6 puncte ș.a.m.d.



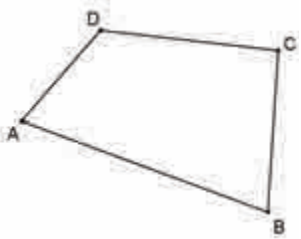
Să observăm că cea mai simplă dintre figurile care se pot forma respectând condițiile problemelor anterioare este triunghiul.

**DEFINIȚIE**

Fie punctele distincte $A$, $B$, $C$ și $D$, oricare trei necoliniare, considerate în ordinea scrisă. Figura geometrică formată din segmentele $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$, cu proprietatea că segmentele $AB$ și $CD$, respectiv $BC$ și $DA$, nu se intersectează, se numește *patrulater* și se notează $ABCD$.

**OBSERVAȚIE**

Citirea și notarea patrulaterelor este foarte importantă:




❖ Dacă patrulaterul este desenat și notat, citirea lui se face „circular”, plecând din unul dintre puncte și “înconjurând” patrulaterul. De exemplu, începem cu $A$, urmat de $B$, $C$ și $D$ ($ABCD$) sau urmat de $D$, $C$ și $B$ ($ADCB$), dar nu vom spune $ACBD$ sau $ACDB$, ...

❖ Pentru figura alăturată sunt următoarele variante de citire: $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $BADC$, $CBAD$ sau $DCBA$. Orice altă ordine a literelor nu reprezintă o notație a patrulaterului desenat.

## ✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!

| Elementele patrulaterului $ABCD$ | |
|---|---|
| vârfuri | punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ |
| unghiuri | $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$ sau $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle CDA$ |
| laturi | segmentele $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$ |

❖ Despre două vârfuri ale patrulaterului care determină o latură, sau despre unghiurile corespunzătoare lor, spunem că sunt *consecutive* sau *alăturate*.

❖ Despre două vârfuri ale patrulaterului care nu determină o latură, sau despre unghiurile corespunzătoare lor, spunem că sunt *opuse*.

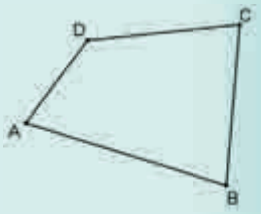
❖ Segmentele determinate de două vârfuri opuse ale patrulaterului se numesc *diagonale*.

❖ Despre două laturi ale patrulaterului care au un capăt comun spunem că sunt *consecutive* sau *alăturate*.

❖ Despre două laturi ale patrulaterului care nu au puncte comune spunem că sunt *opuse*.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Pentru patrulaterul $ABCD$ din figura alăturată numiți:
• o pereche de laturi consecutive și o pereche de laturi opuse;
• o pereche de unghiuri consecutive și o pereche de unghiuri opuse.

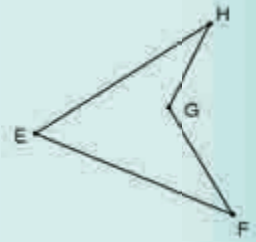



*Rezolvare.*

• $AB$ și $BC$ laturi consecutive; $AB$ și $CD$ laturi opuse;

• $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ unghiuri consecutive; $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$ unghiuri opuse.

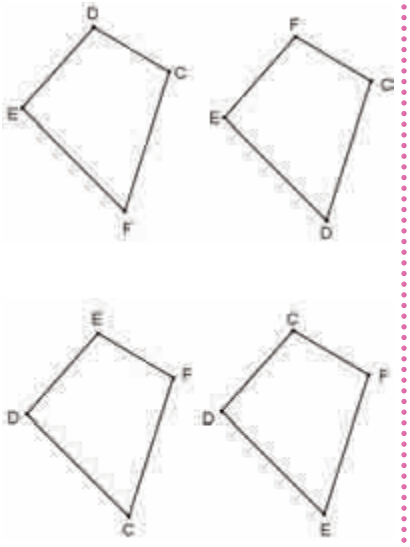
➢ Pentru patrulaterul $ABCD$ de la exercițiul anterior, precum și pentru patrulaterul $EFGH$, desenat alăturat, realizăm următorul experiment: suprapunem o riglă peste fiecare dintre laturi și studiem poziția față de riglă a celor două vârfuri care nu sunt capetele laturii. Observăm că:




• în cazul patrulaterului $ABCD$, pentru fiecare dintre laturi, vârfurile rămase sunt de aceeași parte a riglei;
• în cazul patrulaterului $EFGH$, pentru laturile $EF$ și $EH$ vârfurile rămase sunt de aceeași parte a riglei, dar, de exemplu, pentru latura $FG$, punctele $E$ și $H$ sunt de o parte și de cealaltă a riglei.

## ! ATENȚIE

Pentru un patrulater desenat, notarea se face respectând aceleași reguli. De exemplu, un patrulater $CDEF$ se poate nota:




...

**DEFINIȚIE**

❖ Un patrulater se numește *convex* dacă, oricare ar fi o latură a sa, vârfurile nesituate pe aceasta sunt de aceeași parte a dreptei suport a laturii.

❖ Un patrulater care nu este convex se numește *concav*.

**OBSERVAȚIE**

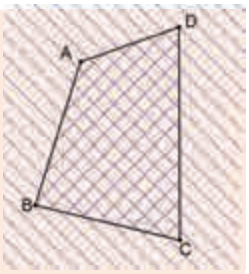
Orice două puncte am considera în interiorul unui patrulater convex, segmentul determinat de acestea este situat în interiorul patrulaterului.

Observația poate fi considerată o definiție alternativă a patrulaterului convex.

**DEFINIȚIE**

❖ ***Interiorul*** unui patrulater convex este format din punctele aflate în interiorul fiecărui unghi al patrulaterului – porțiunea dublu hașurată – și se notează Int *ABCD*.

❖ ***Exteriorul*** patrulaterului este format din punctele care nu se află nici pe laturi și nici în interiorul patrulaterului – porțiunea simplu hașurată – și se notează Ext *ABCD*.

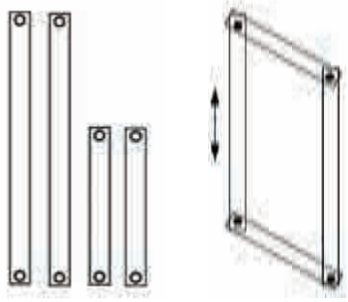



**OBSERVAȚIE**

Interiorul unui patrulate concav este format din toate punctele aflate în interiorul suprafeței delimitate de laturile patrulaterului.

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Tăiați 4 bucăți de lemn, două câte două congruente, și realizați în capetele lor găuri. Folosind patru șuruburi, realizați *„paralelogramul articulat”*, ca în figură:



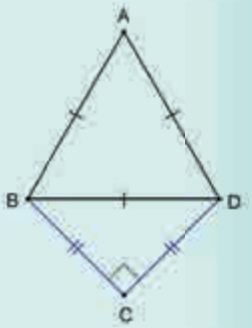
**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Desenați un triunghi echilateral *ABD* și un punct *C*, în exteriorul triunghiului, astfel încât $\Delta BCD$ să fie dreptunghic isoscel, cu ipotenuza *BD*.

a. Numiți patrulaterul obținut și precizați dacă este convex sau concav.

b. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle ABC$.

c. Calculați suma măsurilor unghiurilor patrulaterului.




*Rezolvare.*

a. Patrulaterul *ABCD* este convex.

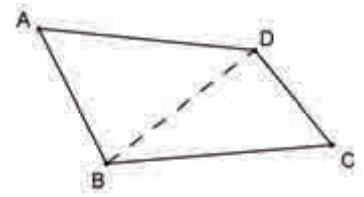
b. Măsura fiecărui unghi al triunghiului echilateral este 60°, iar măsura unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic isoscel este 45°, deci:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD$; $\sphericalangle ABC = 60° + 45° = 105°$.

c. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 105° + 90° + 105° + 60° = 360°$

**TEOREMĂ** Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°.

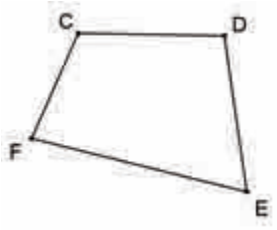
*Ipoteză*:
*ABCD* patrulater convex
*Concluzie*:
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 360°$




*Demonstrație*:
Construim diagonala *BD* și vom folosi proprietatea sumei măsurilor unghiurilor celor două triunghiuri obținute: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB =$
$= (\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC) + \sphericalangle BCD + (\sphericalangle CDB + \sphericalangle BDA) + \sphericalangle DAB =$
$= (\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA + \sphericalangle DAB) + (\sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDB) = 180° + 180° = 360°$

## EXERSAȚI

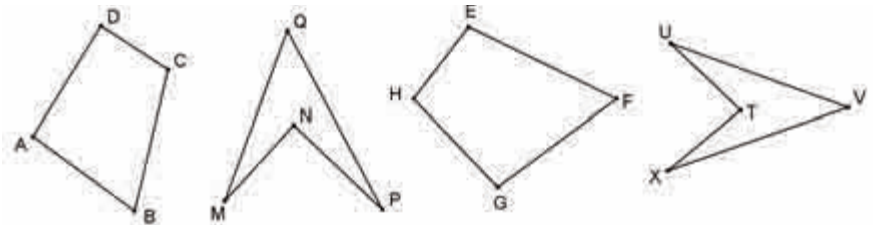
**1.** Dintre următoarele notații, alegeți-le pe cele corecte pentru figura alăturată: *CDEF*, *DEFC*, *CFDE*, *EFCD*, *FECD*, *FDEC*, *DCFE*, *FCDE*.




**2.** Desenați $\Delta ABC$ și un punct *D* astfel încât:
a. *D* este în interiorul triunghiului; precizați ce fel de patrulater este *ABCD*;
b. *D* este în exteriorul triunghiului și patrulaterul *ABCD* este convex;
c. *D* este în exteriorul triunghiului și patrulaterul *ABCD* este concav;
d. *D* este în exteriorul triunghiului și patrulaterul *ABDC* este convex;
e. *D* este în exteriorul triunghiului și patrulaterul *ADBC* este convex.
Pentru fiecare dintre desenele realizate, construiți diagonalele și notați-le în dreptul figurii.

**3.** Copiați pe caiete și completați tabelul următor referitor la patrulaterele desenate.

| Numele patrulaterului | Convex / concav | Vârfuri | Laturi | Unghiuri | Diagonale |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |




Pentru patrulaterele *ABCD* și *EFGH* măsurați laturile și unghiurile și comparați valorile cu cele ale colegului de bancă. Sunt egale? Dacă nu sunt, observați că diferențele sunt foarte mici. Care ar fi motivul pentru care apar aceste diferențe?

## EXERSAȚI

**4.** Desenați și notați patrulaterele convexe:
a) $MNPQ$ b) $MPNQ$
c) $MNQP$ d) $MPQN$

**5.** Calculați măsura celui de-al patrulea unghi al unui patrulater convex, știind că măsurile celorlalte trei sunt:
a. 70°, 100°, 80°;
b. 85°, 95°, 105°;
c. 108°30', 76°, 81°30';
d. 90°, 90°, 90°.

**6.** În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle A = 55°$, unghiul $B$ are măsura egală cu dublul măsurii unghiului $A$, iar unghiul $D$ are măsura egală cu media aritmetică a măsurilor unghiurilor $A$ și $B$. Măsura unghiului $C$ este egală cu:
a. 110° b. 111°30'
c. 112°30' d. 114°

**7.** Considerăm patrulaterul $ABCD$ în care se cunosc următoarele date: $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 70°$ și $CD \parallel AB$.
a. Realizați desenul patrulaterului, scriind datele din ipoteză în ordinea în care le-ați folosit în cadrul construcției. Comparați ordinea stabilită cu cea a altor colegi de clasă.
b. Calculați măsura unghiului $C$.
c. Pentru a calcula măsura unghiului $D$ putem folosi *proprietatea paralelelor tăiate de o secantă* sau o proprietate a patrulaterelor. Calculați măsura unghiului, folosind una dintre metode, și comparați rezultatul cu cel obținut de un coleg care a folosit cealaltă metodă.

**8.** Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt (în ordinea vârfurilor) direct proporționale cu numerele 8, 9, 11 și 12. Demonstrați că două dintre laturile opuse ale patrulaterului sunt paralele.

**9.** Fie patrulaterul convex $ABCD$, în care: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ și $3 \cdot \sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B$.
a. Arătați că $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$.
b. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
c. Demonstrați că $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$.

**10.** În patrulaterul $MNPQ$, triunghiul $MNQ$ este dreptunghic isoscel, $MN \equiv MQ$, $\sphericalangle MNP = 110°$ și $NP \equiv PQ$.
a. Realizați desenul și explicați pașii în ordinea în care i-ați parcurs. Enumerați cât mai multe noțiuni și proprietăți sugerate de datele problemei.
b. Aflați măsurile unghiurilor $P$ și $Q$ ale patrulaterului.
c. Arătați că punctele $M$, $P$ și mijlocul diagonalei $NQ$ sunt coliniare.

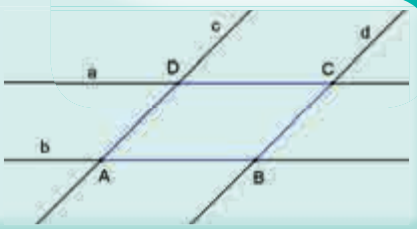
**11.** Fie patrulaterul $ABCD$ în care: suma măsurilor unghiurilor $A$ și $B$ este 150°, suma măsurilor unghiurilor $A$, $B$ și $C$ este 270°, iar unghiul $B$ are măsura cu 10° mai mare decât unghiul $A$.
a. Arătați că $D$ este unghi drept.
b. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

**12.** În patrulaterul convex $ABCD$, diagonala $CA$ este bisectoarea unghiului $C$ și $\sphericalangle BAC = 40°$, $\sphericalangle ACD = 60°$, $\sphericalangle ADC = 70°$. Calculați măsura unghiului $ABC$ și demonstrați că $DA \perp AB$.

# PARALELOGRAMUL

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Desenați dreptele paralele *a* și *b* și alte două drepte paralele, *c* și *d*, care le intersectează pe primele două. Notați punctele de intersecție ca în figura alăturată. Patrulaterul *ABCD* obținut este unul particular, numit *paralelogram*.






**DEFINIȚIE**

Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două se numește *paralelogram*. *ABCD* este paralelogram dacă $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$.

**OBSERVAȚIE**

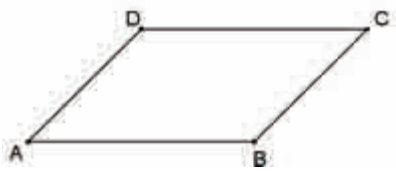
Laturile unui patrulater sunt segmente, dar, pentru simplificare, vom folosi exprimarea *laturi opuse paralele* în loc de *drepte suport ale laturilor opuse paralele*.

Proprietățile paralelismului determină următoarea proprietate a paralelogramului:

**TEOREMA 1**

Într-un paralelogram:
a) unghiurile consecutive sunt suplementare;
b) unghiurile opuse sunt congruente.

*Ipoteză*: *ABCD* paralelogram
*Concluzie*:
a) $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$,
$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$, $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$
b) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$

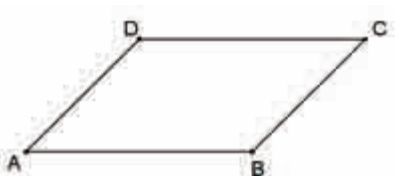



*Demonstrație*:
a) $AD \parallel BC$ și secanta $AB$, rezultă $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ ca unghiuri suplementare ($\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei).
Dovediți singuri celelalte 3 relații.
b) Conform punctului anterior, unghiurile *A*, respectiv *C*, sunt suplementare cu unghiul *B*, deci sunt congruente.
Dovediți singuri congruența celorlate două unghiuri opuse.

**RECIPROCA TEOREMEI 1**

Dacă un patrulater convex are:
a) oricare două unghiuri consecutive suplementare **sau**
b) unghiurile opuse congruente două câte două,
atunci el este paralelogram.

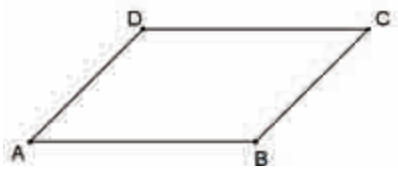
*Reciproca Teoremei 1, puncul a).*
*Ipoteză*: $ABCD$ patrulater convex
$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$,
$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$, $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$
*Concluzie*: $ABCD$ paralelogram




*Demonstrație*: Fie dreptele $AD$ și $BC$ tăiate de secanta $AB$; $A$ și $B$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei și $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ (sunt suplementare), deci $AD \parallel BC$.

Dovediți singuri, că $AB \parallel CD$ și concluzionați.

*Reciproca Teoremei 1, puncul b).*
*Ipoteză*: $ABCD$ patrulater convex
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$
*Concluzie*: $ABCD$ paralelogram

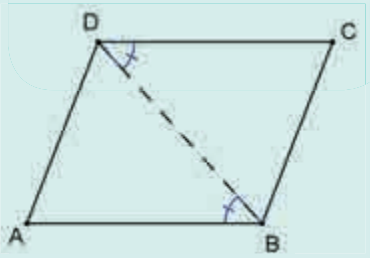



*Demonstrație*: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$ și, folosind ipoteza, obținem $2(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 360°$, deci $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, de unde obținem, înlocuind $\sphericalangle A$ cu $\sphericalangle C$ sau/și $\sphericalangle B$ cu $\sphericalangle D$, celelalte relații din punctul a).

Conform punctului a) din Reciproca Teoremei 1 obținem că $ABCD$ paralelogram.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Desenați paralelogramul $TREN$ știind că $TR = 3$ cm și $RE = 4$ cm.
➢ Desenați paralelogramul $ABCD$ cu: $\sphericalangle A = 70°$, $AB = 6$ cm și $AD = 5$ cm.
a. Calculați măsurile unghiurilor $B$ și $C$ ale paralelogramului.
b. Demonstrați că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$.
c. Demonstrați că $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.




*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram
$\sphericalangle A = 70°$, $AB = 6$ cm și $AD = 5$ cm
*Concluzie*: a. $\sphericalangle B = ?$, $\sphericalangle C = ?$
b. $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$
c. $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$
*Demonstrație*:
a. $ABCD$ paralelogram, așadar, conform Teoremei 1, rezultă:
- $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt suplementare, deci $\sphericalangle B = 110°$;
- $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, deci $\sphericalangle C = 70°$.

b. $AB \parallel DC$ și secanta $BD$, rezultă $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (unghiuri alterne interne congruente).

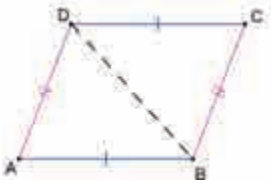
c. $\Delta ABD, \Delta CDB \left| \begin{matrix} \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB \\ BD \equiv DB \\ \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD \end{matrix} \right. \xrightarrow{ULU} \Delta ABD \equiv \Delta CDB \Rightarrow \left| \begin{matrix} AB \equiv CD \\ AD \equiv BC \end{matrix} \right.$

Am folosit în demonstrație faptul că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$. Demonstrați relația.

Punctul c. al problemei ne prezintă o altă proprietate a paralelogramului:

**TEOREMA 2** Într-un paralelogram laturile opuse sunt congruente.

**RECIPROCA TEOREMEI 2** Dacă un patrulater convex are laturile opuse congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.




*Ipoteză*: $ABCD$ patrulater convex
$AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$
*Concluzie*: $ABCD$ paralelogram
*Demonstrație*:

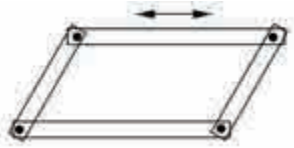
$$\Delta ABD, \Delta CDB \left| \begin{matrix} AB \equiv CD \\ BD \equiv DB \\ AD \equiv BC \end{matrix} \right. \xRightarrow{LLL} \Delta ABD \equiv \Delta CDB \Rightarrow \left| \begin{matrix} \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB \\ \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD \end{matrix} \right.$$

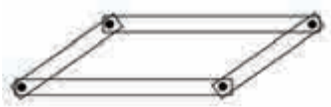
Dreptele $AB$ și $CD$ tăiate de secanta $BD$ formează unghiurile alterne interne congruente $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB \Rightarrow AB \parallel CD$. Demonstrați singuri că $AD \parallel BC$.

**OBSERVAȚIE**

Atunci când știm că laturile opuse ale unui patrulater sunt congruente două câte două, putem spune că el este paralelogram. Însă, dacă îl desenăm, observăm că putem construi diverse paralelograme. Să folosim *paralelogramul articulat* construit în lecția anterioară.

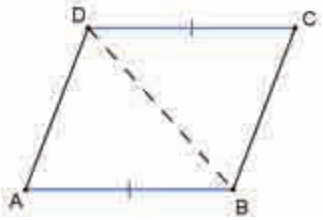
Așadar, paralelogramul nu este determinat de laturile sale, spre deosebire de triunghi care este determinat de cele 3 laturi (reamintim că *determinat* înseamnă că desenul/construcția este unic/unică).





**TEOREMA 3** Un patrulater convex în care două laturi opuse sunt paralele și congruente este paralelogram.

*Ipoteză*: $ABCD$ patrulater convex
$AB \parallel CD$ și $AB \equiv CD$
*Concluzie*: $ABCD$ paralelogram
*Demonstrație*:
$AB \parallel DC$ și secanta $BD$, rezultă $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (unghiuri alterne interne congruente).




$$\Delta ABD, \Delta CDB \left| \begin{matrix} AB \equiv CD \\ \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB \\ BD \equiv DB \end{matrix} \right. \xRightarrow{LUL} \Delta ABD \equiv \Delta CDB \Rightarrow AD \equiv BC$$

$ABCD$ are laturile opuse congruente două câte două, deci este paralelogram.

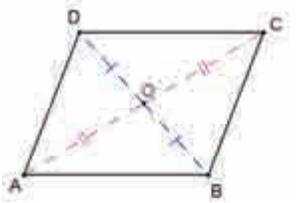
**OBSERVAȚIE**

Teorema 3 ne prezintă și una dintre cele mai simple metode de a desena un paralelogram: desenăm două segmente congruente, ale căror drepte suport sunt paralele.

**TEOREMA 4**

Într-un paralelogram, punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale.

*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$
*Concluzie*: $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$




*Demonstrație*: $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$ și
$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ – justificați singuri

$$\Delta ABO, \Delta CDO \left| \begin{array}{l} AB \equiv CD \\ \sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO \\ \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \end{array} \right| \xrightarrow{LUU} \Delta ABO \equiv \Delta CDO \Rightarrow AO \equiv OC, BO \equiv OD.$$

**RECIPROCA TEOREMEI 4**

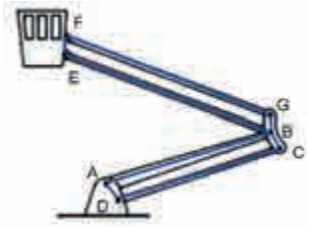
Dacă într-un patrulater convex punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale, atunci patrulaterul este paralelogram.

Demonstrați singuri *Reciproca Teoremei 4*, folosind aceleași triunghiuri dar cu alt caz de congruență.

Pentru simplificare, vom spune *„diagonalele se înjumătățesc”* în loc de *„punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale”*.

**APLICAȚIE PRACTICĂ**

Observați în desen o nacelă și cele două brațe care o susțin. $ABCD$ și $BEFG$ sunt paralelograme, $BG \parallel EF$. $AD$ este fixat în soclu și, chiar dacă brațul $ABCD$ se ridică sau se coboară, $BC$ și $AD$ rămân paralele. Așadar poziția lui $BG$, și implicit a lui $EF$, nu se va modifica (rămâne verticală), deci nacela nu se va înclina dacă brațele se ridică sau se coboară.

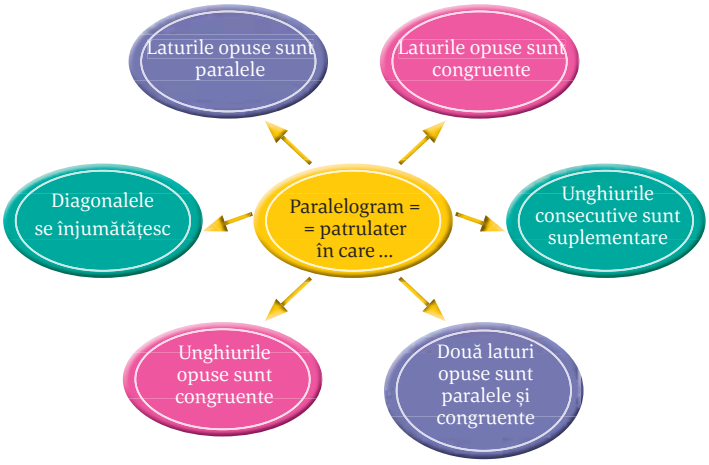





**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

*Completați enunțurile următoare cu ceea ce vi se pare cel mai potrivit și comparați răspunsurile cu cele ale colegilor.*

Dacă într-un paralelogram:
- știm măsura unui unghi, atunci .....
- știm lungimea unei laturi, atunci .....
- știm lungimile a două laturi (!), atunci .....
- știm lungimile a două laturi alăturate, atunci .....
- știm că o diagonală este bisectoarea unui unghi al paralelogramului, atunci .....



## EXERSAȚI

**1.** Rezolvați cerințele din tabelul următor, referitoare la paralelogramul $ABCD$:

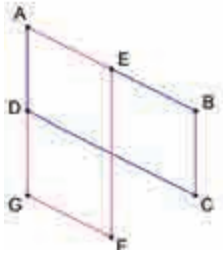
| *Ipoteză:* | *Concluzie:* |
|---|---|
| a. $\sphericalangle A = 50°$ | $\sphericalangle B = ?,\ C = ?$ |
| b. $\sphericalangle D = 140°$ | precizați unghiurile obtuze ale paralelogramului |
| c. $AB = 8$ cm | $CD = ?$ |
| d. $BC = 6$ cm, $CD = 7$ cm | $P_{ABCD} = ?$ |
| e. $AC \cap BD = \{O\}$, $AO = 3$ cm, $DO = 5$ cm | $CO = ?$, $BD = ?$ |
| f. $P_{ABCD} = 22$ cm, $P_{\Delta ABD} = 18$ cm | $BD = ?$ |

**2.** În paralelogramul $MNPQ$ se știe că $\sphericalangle MPN = 25°$ și $\sphericalangle MPQ = 45°$. Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului.

**3.** Perimetrul unui paralelogram este 30 cm, iar una dintre laturi are lungimea de 6 cm. Calculați lungimile tuturor laturilor paralelogramului.

**4.** Calculați măsurile unghiurilor unui paralelogram în fiecare dintre situațiile:
a. măsura unui unghi este dublă măsurii altui unghi;
b. două dintre unghiuri au măsurile direct proporționale cu numerele 2 și 3;
c. două dintre unghiuri au măsurile invers proporționale cu numerele 4 și 5.

**5.** În figura alăturată, $ABCD$ și $AEFG$ sunt paralelograme. Demonstrați că $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle EFG$.

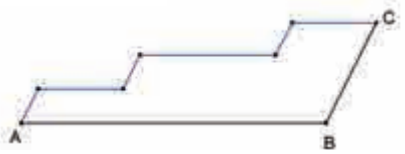



**6.** Desenați paralelogramul în fiecare dintre situațiile:
a. $ABCD$: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $\sphericalangle ABC = 130°$;
b. $EFGH$: $EF = 4,5$ cm, $EH = 3$ cm și $\sphericalangle FGH = 70°$;
c. $MNPQ$: $MP = 6$ cm, $QN = 8$ cm și $\sphericalangle MON = 120°$, unde $\{O\} = MP \cap QN$;
d. $ABCD$: $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm și $AD = 3$ cm (se recomandă folosirea cazului de construcție LLL de la triunghiuri).

**7.** Se consideră un triunghi $ABC$. Desenați punctul $D$ astfel încât:
a. $ABCD$ paralelogram; b. $ABDC$ paralelogram;
c. $ADBC$ paralelogram.

**8.** În paralelogramul $ABCD$, bisectoarea unghiului $A$ se intersectează cu cea a unghiului $B$ în punctul $E$. Demonstrați că $\sphericalangle AEB = 90°$.

**9.** În figura următoare este prezentată schematic o scară. Laturile treptelor sunt paralele cu $AB$ și, respectiv, cu $BC$. Se montează un covor pe trepte, de la $A$ la $C$. Dacă $AB = 3$ m și $BC = 1,1$ m, calculați lungimea covorului.

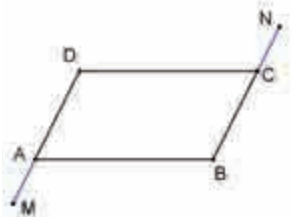



**10.** Unele dintre următoarele afirmații sunt incomplete, altele au informații „în plus”. Corectați, unde este cazul, pentru a obține afirmații adevărate și precizați care sunt informațiile „în plus”.
a. Un paralelogram este un patrulater convex cu două laturi paralele și două laturi congruente.
b. Un paralelogram este un patrulater convex cu laturile paralele și congruente două câte două.
c. Un paralelogram este un patrulater convex cu laturile congruente două câte două.
d. Un paralelogram este un patrulater convex cu unghiurile congruente două câte două.
e. Dacă un patrulater convex are două unghiuri consecutive suplementare, atunci el este paralelogram.

## EXERSAȚI

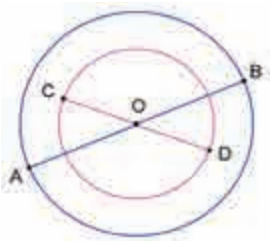
**11.** Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AB$ și, respectiv, $CD$. Demonstrați că:
a. $AMND$ este paralelogram;
b. $AMCN$ este paralelogram.

**12.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$. Punctele $M$, $A$ și $D$, respectiv $B$, $C$ și $N$ sunt coliniare, iar $AM \equiv CN$. Demonstrați că:
a. $MBND$ este paralelogram;
b. $MC \parallel AN$.




**13.** Considerăm un triunghi $ABC$ și mediana $BM$, $M \in AC$. Prelungim segmentul $BM$ cu un segment $MD$, $MD \equiv MB$. Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

**14.** În figura alăturată sunt reprezentate două cercuri concentrice și două diametre, $CD$ în cercul cu raza mai mică și $AB$ în cercul cu raza mai mare. Ce figură este $ADBC$? Justificați răspunsul.




**15.** Considerăm paralelogramul $AMCN$ și punctele $B$ și $D$ situate pe diagonala $MN$, astfel încât $MB \equiv ND$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram.

**16.** Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB > AD$. Bisectoarea $\sphericalangle BAD$ intersectează latura $CD$ în punctul $E$, iar bisectoarea $\sphericalangle BCD$ intersectează latura $AD$ în punctul $F$. Demonstrați că:
a. triunghiul $DAE$ este isoscel;
b. segmentele $DE$ și $FB$ sunt congruente;
c. dreptele $AE$ și $FC$ sunt paralele.

**17.** Fie triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC = 8$ cm și $D$ un punct oarecare pe latura $BC$. Paralela prin $D$ la $AB$ intersectează $AC$ în $E$, iar paralela prin $D$ la $AC$ intersectează $AB$ în $F$.
a. Demonstrați că triunghiul $EDC$ este isoscel.
b. Demonstrați că $AFDE$ este paralelogram.
c. Calculați perimetrul paralelogramului $AFDE$.

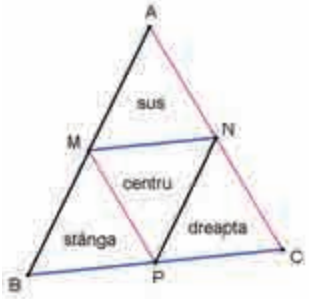
**18.** Fie triunghiul $ABC$ și punctele $D$ și $E$ simetricele punctelor $A$ și $B$ față de punctul $C$. Demonstrați că $ED \equiv AB$ și $AE \parallel BD$.

**19.** Decupați din hârtie colorată două triunghiuri congruente. Așezați-le astfel încât să obțineți un paralelogram, justificând așezarea.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Pentru ora următoare, decupați dintr-un carton un triunghi oarecare (neisoscel) și colorați cu câte o culoare diferită fiecare latură. Determinați mijloacele laturilor.

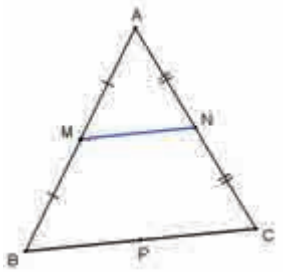
Desenați apoi segmentele determinate de câte două dintre mijloace, cu acea culoare corespunzătoare laturii pe care nu o intersectează. Notați triunghiurile ca în figura alăturată.



# LINIA MIJLOCIE ÎN TRIUNGHI. CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI TRIUNGHI

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Desenați $\Delta ABC$, punctele $M$, $N$ și $P$, reprezentând mijloacele laturilor $AB$, $AC$ și respectiv, $BC$, precum și segmentul $MN$.

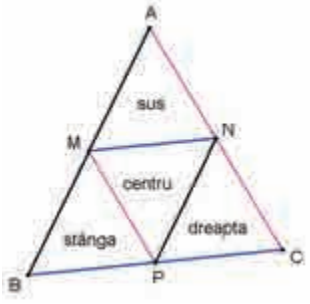



**DEFINIȚIE**

Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește *linie mijlocie în triunghi*.

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Din cartonul în formă de triunghi pregătit la lecția anterioară, decupați cele patru triunghiuri și așezați-le unul peste altul, astfel încât laturile de aceeași culoare să se suprapună. Observăm că cele patru triunghiuri se suprapun perfect, deci putem spune despre ele că sunt congruente. Această congruență ne sugerează, de exemplu, că $MN = BP = PC = \frac{BC}{2}$, afirmație valabilă pentru oricare dintre cele 3 linii mijlocii. Mai mult, congruențele $MN \equiv BP$ și $NP \equiv MB$ determină paralelogramul $MNPB$, ceea ce sugerează că $MN \parallel BP$ ($MN \parallel BC$).




**TEOREMĂ**

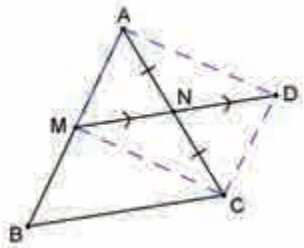
**TEOREMA LINIEI MIJLOCII ÎN TRIUNGHI**

În orice triunghi, linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi este paralelă cu a treia latură și are lungimea jumătate din lungimea acesteia.

*Ipoteză*: $\Delta ABC$, $M \in AB$, $N \in AC$, $MN$ linie mijlocie

*Concluzie*: $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$

*Demonstrație*: Fie $D$ simetricul punctului $M$ față de punctul $N$. Segmentele $AC$ și $MD$ se înjumătățesc, așadar $ADCM$ este paralelogram, deci $\begin{cases} DC \equiv AM \\ DC \parallel AM \end{cases}$. Dar $AM \equiv MB$ și $M \in AB \Rightarrow \begin{cases} DC \equiv BM \\ DC \parallel BM \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow BCDM$ paralelogram. Obținem astfel că: $MD \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC$ și $MD \equiv BC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$, deoarece, prin construcție, $MD = 2MN$.



**OBSERVAȚIE**

Folosind teorema, puteți acum demonstra (cazul LLL) congruența celor patru triunghiuri din activitatea practică anterioară. Cele trei lini mijlocii determină *triunghiul median* al triunghiului dat.

**NE AMINTIM!**

*Axioma paralelelor:*

Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi numai o singură paralelă la dreapta dată.

Ce este o axiomă?

Un adevăr general acceptat fără demonstrație, deoarece se impune gândirii ca evident.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Considerăm $\Delta ABC$, $M$ mijlocul laturii $AB$ și $N$ mijlocul laturii $AC$. Prin punctul $M$ construim o paralelă la $BC$ care intersectează $AC$ într-un punct $N'$.

a. Care este poziția dreptei $MN$ față de $BC$?

b. Se pot construi două paralele prin $M$ la $BC$? Ce concluzie putem trage?

*Rezolvare.*

a. Conform *Teoremei liniei mijlocii*, $MN \parallel BC$.

b. Conform *Axiomei paralelelor*, prin $M$ se poate construi o singură paralelă la $BC$, deci dreptele $MN$ și $MN'$ coincid. Dreptele distincte $AC$ și $MN$ nu pot avea două puncte distincte comune, deci $N$ și $N'$ coincid.

**RECIPROCĂ**

**RECIPROCA TEOREMEI LINIEI MIJLOCII ÎN TRIUNGHI**

Paralela dusă prin mijlocul unei laturi a unui triunghi la o latură a triunghiului intersectează a treia latură a triunghiului în mijlocul acesteia.

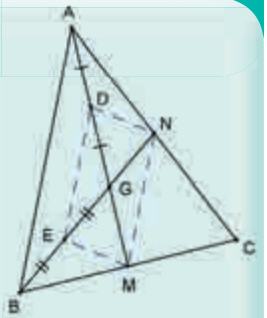
**NE AMINTIM!**

În clasa a VI-a ați văzut, intuitiv (prin construcții), că *medianele unui triunghi sunt concurente*. Punctul lor de intersecție, numit *centrul de greutate al triunghiului,* se notează, în general, cu $G$. Prin măsurare ați constatat că acesta se află, pe fiecare mediană, la o treime față de latură și două treimi față de vârf.

Proprietatea liniei mijlocii a unui triunghi permite demonstrarea acestor proprietăți ale medianelor unui triunghi.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Considerăm $\Delta ABC$, medianele $AM$, $M \in BC$ și $BN$, $N \in AC$ și punctul $\{G\} = AM \cap BN$. Notăm cu $D$ și $E$ mijloacele segmentelor $AG$ și $BG$.




a. Arătați că $DEMN$ este paralelogram.

b. Arătați că $GM = \frac{1}{3}AM$ și $GN = \frac{1}{3}BN$.

*Rezolvare.*

a. $DE$ linie mijlocie în $\Delta GAB$, deci $DE \parallel AB$ și $DE = \frac{AB}{2}$; $MN$ linie mijlocie în $\Delta CAB$, așadar $MN \parallel AB$ și $MN = \frac{AB}{2}$; $DE \parallel MN$ și $DE \equiv MN$, deci $DEMN$ este paralelogram.

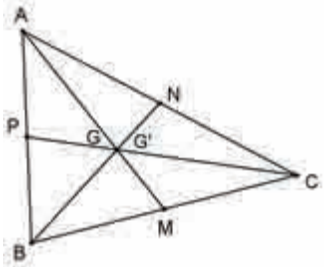
b. $DEMN$ paralelogram $\Rightarrow MG = GD$ și cum, prin construcție, $GD = DA$, rezultă $MG = GD = DA = \frac{AM}{3}$ și, analog, $NG = GE = EB = \frac{BN}{3}$.

Putem enunța astfel teorema:

TEOREMĂ

**TEOREMA REFERITOARE LA CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI TRIUNGHI**

Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de intersecție este situat, pe fiecare dintre mediane, la două treimi față de vârf și o treime față de latura opusă vârfului.




*Ipoteză:* $\Delta ABC$; $AM, M \in BC$; $BN, N \in AC$; $CP, P \in AB$; $AM, BN, CP$ mediane

*Concluzie:* $AM \cap BN \cap CP = \{G\}$

$GM = \frac{1}{3}AM$, $GA = \frac{2}{3}AM$ și relațiile echivalente pentru celelalte mediane

*Demonstație:* Considerăm $AM \cap BN = \{G\}$ și $AM \cap CP = \{G'\}$ și demonstrăm că $G = G'$.

Aplicând demonstrația din problema anterioară pentru $G$, obținem $GM = \frac{1}{3}AM$.

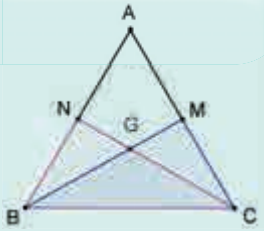
Aplicând demonstrația din problema anterioară pentru $G'$, obținem $G'M = \frac{1}{3}AM$.

Obținem $MG = MG'$ și, cum ambele puncte sunt pe segmentul $AM$, rezultă $G = G'$.

Cum $G \in AM$ și $MG = \frac{1}{3}AM$ rezultă $AG = \frac{2}{3}AM$ și relațiile echivalente.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Demonstrați că, dacă două mediane ale unui triunghi sunt congruente, atunci laturile corespunzătoare lor sunt congruente.




*Ipoteză*: $\Delta ABC$: $BM, M \in AC$; $CN, N \in AB$; $BM, CN$ mediane, $BM \equiv CN$

*Concluzie*: $AC \equiv AB$

*Demonstrație*: Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului: $BG = \frac{2}{3}BM$, $CG = \frac{2}{3}CN \Rightarrow$ $BG \equiv CG \Rightarrow \Delta GBC$ isoscel$\Rightarrow \sphericalangle GBC \equiv \sphericalangle GCB$.

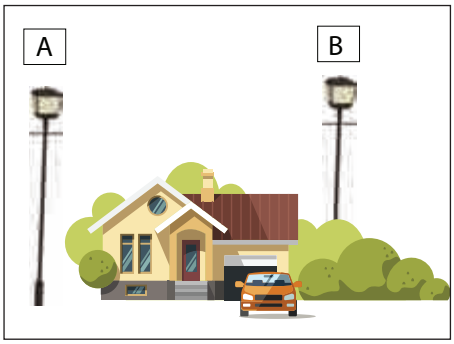
Din congruența $\Delta MBC \equiv \Delta NCB$ (LUL) (demonstrați) rezultă $MC \equiv BN \Rightarrow AC \equiv AB$.

## NE AMINTIM!

În clasa a VI-a ați demonstrat că, într-un triunghi isoscel, medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente. Folosind proprietatea centrului de greutate, demonstrați o reciprocă a acestei proprietăți.

## APLICAȚIE PRACTICĂ

Pe deasupra unei clădiri trebuie tras un cablu care să unească doi stâlpi de iluminat montați de o parte și de alta a clădirii (vezi figura alăturată în care cei doi stâlpi sunt montați în punctele $A$ și $B$). Clădirea fiind între cei doi stâlpi, nu se poate măsura distanța dintre ei. Explicați cum, folosind un al treilea punct ales convenabil și proprietatea liniei mijlocii a unui triunghi, puteți determina lungimea cablului (distanța dintre cele două puncte). Calculați și voi distanța dintre două puncte situate de o parte și de alta a unei clădiri din curtea școlii.



## EXERSAȚI

**1.** În $\Delta ABC$, $M$, $N$ și $P$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $AC$ respectiv $BC$.

A. Se cunosc: $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 12$ cm.

i. Lungimea lui $MN$ este egală cu:

a) 3 cm; b) 6 cm; c) 12 cm; d) 4 cm.

ii. Perimetrul triunghiului $MNP$ este egal cu:

a) 10 cm; b) 12 cm; c) 13 cm; d) 20 cm.

B. Se cunosc: $MN = 2$ cm, $MP = 3{,}5$ cm și $AB = 5$ cm

i. Perimetrul triunghiului $MNP$ este egal cu:

a) 8 cm; b) 7,5 cm; c) 7 cm; d) 5,5 cm.

ii. Perimetrul triunghiului $ABC$ este egal cu:

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm.

**2.** Calculați perimetrul unui triunghi isoscel, dacă două dintre liniile mijlocii din triunghi au lungimile: a) 3 cm și 4 cm; b) 3 cm și 7 cm.

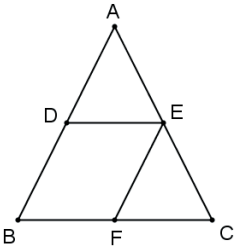
**3.** În $\Delta ABC$, $G$ este centrul de greutate, iar $BM$ și $CN$ sunt mediane. Se cunosc: $BG = 4$ cm și $NG = 3$ cm.

a. Lungimea segmentului $GM$ este egală cu ... cm.

b. Lungimea medianei $CN$ este egală cu ... cm.

c. Suma lungimilor medianelor $BM$ și $CN$ este egală cu ... cm.

**4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel $ABC$, $AB \equiv AC$. Punctele $D$, $E$ și $F$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $AC$, respectiv $BC$. Demonstrați că $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle ACB$.




**5.** În triunghiul dreptunghic $\Delta DEF$ lungimea ipotenuzei $EF$ este de 12 cm. Calculați lungimea segmentului $DG$, unde $G$ este centrul de greutate al triunghiului.

**6.** Fie $\Delta ABC$ și punctele $D \in AB$, $AD = \frac{AB}{4}$ și $E \in AC$, $AE = \frac{AC}{4}$. Arătați că $DE \parallel BC$ și că $DE$ are lungimea egală cu un sfert din lungimea lui $BC$.

**7.** În patrulaterul $ABCD$ punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$ respectiv $DA$. Demonstrați că:

a. $MN \parallel AC$;

b. $ABCD$ este paralelogram.

**8.** În $\Delta ABC$ considerăm linia mijlocie $MN$, $M \in AB$ și $N \in AC$ și înălțimea $AD$, $D \in BC$.

a. Demonstrați că $AD \perp MN$.

b. Dacă $MN \cap AD = \{P\}$, demonstrați că $P$ este mijlocul segmentului $AD$.

**9.** Fie $\Delta ABC$, $DE$ linie mijlocie, $D \in AC$, $E \in BC$, mediana $CM$, $M \in AB$, $DE \cap CM = \{O\}$ și $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

a. Demonstrați că $O$ este mijlocul lui $DE$, precum și al lui $CM$.

b. Dacă $CM = 18$ cm, calculați lungimea segmentului $GO$.

**10.** În paralelogramul $ABCD$, de centru $O$, se consideră punctele $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AB$ și $DC$. Demonstrați că $M$, $O$ și $N$ sunt coliniare.

**11.** Considerăm $\Delta ABC$, punctul $M$ mijlocul laturii $AB$, $N$ mijlocul laturii $AC$ și $P$ un punct oarecare situat pe latura $BC$. Punctele $E$ și $F$ sunt mijloacele segmentelor $PM$, respectiv $PN$. Arătați că $BC = 4EF$.

**12.** În paralelogramul $ABCD$, cu $AC = 12$ cm, considerăm punctul $E$, mijlocul segmentului $CD$ și $AC \cap BE = \{P\}$. Calculați lungimea segmentului $CP$.

**13.** În $\Delta ABC$, $M$ este mijlocul laturii $AB$, iar $N$ și $P$ sunt situate pe $BC$ astfel încât $BN = NP = PC$.

a. Demonstrați că $MN \parallel AP$.

b. Dacă $CM \cap AP = \{R\}$, demonstrați că $R$ este mijlocul segmentului $MC$.

# PARALELOGRAME PARTICULARE: DREPTUNGHIUL



Folosind *paralelogramul articulat* construit și un echer, rotiți laturile acestuia până când unul dintre unghiuri devine drept. Observăm că toate unghiurile devin drepte. Patrulaterul obținut este un paralelogram particular.

**DEFINIȚIE** Paralelogramul cu un unghi drept se numește *dreptunghi*.

Să dovedim afirmația făcută mai sus:




*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram, $\sphericalangle A = 90°$

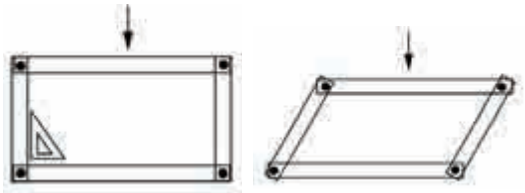
*Concluzie*: $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle D = 90°$

*Demonstrație*: $ABCD$ paralelogram$\Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° \Rightarrow \sphericalangle B = 90°$; $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C \Rightarrow \sphericalangle C = 90°$; $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180° \Rightarrow \sphericalangle D = 90°$.

**TEOREMA 1** Într-un dreptunghi toate unghiurile sunt congruente și au măsura de 90°.

**RECIPROCA TEOREMEI 1** Dacă un patrulater convex are toate unghiurile congruente, atunci el este dreptunghi.

Demonstrați singuri Reciproca Teoremei 1.



Observați figurile alăturate. În fiecare dintre cele două situații, patrulaterul este așezat în poziție verticală, cu una dintre laturi pe masă. Exercităm, în fiecare caz, o apăsare pe verticală. Observăm că, în cazul formei care nu este dreptunghi, aceasta are tendința să se deformeze, apropiind latura orizontală superioară de masă, pe când la forma dreptunghi, aceasta nu se deformează. Acesta este și unul dintre motivele pentru care atât tocul ușii, cât și al geamului, au forma unui dreptunghi, rezistența acestuia la deformări fiind mai mare decât la alte patrulatere.

**OBSERVAȚIE**

Un dreptunghi $ABCD$ este un paralelogram, deci are toate proprietățile pe care le au paralelogramele: $AB \equiv CD$ și $BC \equiv AD$; $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$, unde $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor; unghiurile fiind toate drepte, evident că oricare două unghiuri consecutive sunt suplementare și cele opuse sunt congruente.

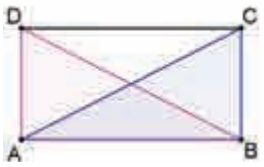
**OBSERVAȚIE**

O proprietate pe care dreptunghiul o are în plus față de paralelogram se referă la diagonale. Ea se poate observa ușor folosind următorul experiment: luăm două foi de hârtie identice (două dreptunghiuri), desenăm pe fiecare dintre ele câte una dintre diagonale, după care întoarcem una dintre foi cu „fața în jos” și o suprapunem peste cealaltă. Constatăm că cele două diagonale se suprapun.

**TEOREMA 2** Într-un dreptunghi, diagonalele sunt congruente.

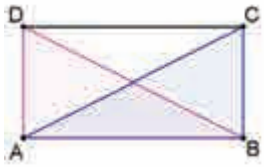
*Ipoteză*: $ABCD$ dreptunghi
*Concluzie*: $AC \equiv BD$
*Demonstrație*:

$$\Delta ABC,\ \Delta BAD \begin{vmatrix} AB \equiv BA \\ BC \equiv AD \end{vmatrix} \xrightarrow{CC} \Delta ABC \equiv \Delta BAD \Rightarrow AC \equiv BD$$




**RECIPROCA TEOREMEI 2** Dacă un paralelogram are diagonalele congruente, atunci el este dreptunghi.

*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram, $AC \equiv BD$
*Concluzie*: $ABCD$ dreptunghi
*Demonstrație*: $\Delta ABC \equiv \Delta BAD \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$; cele două unghiuri sunt suplementare (sunt consecutive în paralelogram), rezultă $\sphericalangle ABC = 90°$. Așadar paralelogramul $ABCD$ are un unghi drept, deci este dreptunghi.




**ACTIVITATE PRACTICĂ**

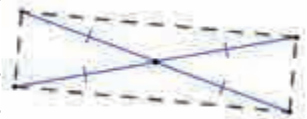
Explicați cum puteți verifica, cu ajutorul unei sfori, dacă tabla de scris este dreptunghi. Atenție, nu uitați să verificați mai întâi dacă este paralelogram! Fiți imaginativi!



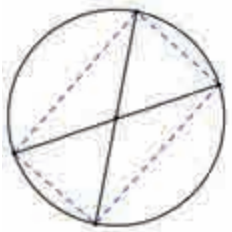
**OBSERVAȚII**

❖ Ca o consecință imediată a teoremei anterioare, obținem că $\Delta OAB$, $\Delta OBC$, $\Delta OCD$ și $\Delta ODA$ sunt triunghiuri isoscele, unde $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor.

❖ Reciproca teoremei ne sugerează și o idee de desenare a unui dreptunghi fără a folosi paralelismul sau echerul:



• Desenăm două segmente congruente care au același mijloc și unim capetele lor, ca în figură. Ce proprietate a paralelogramului folosim împreună cu reciproca teoremei 2?



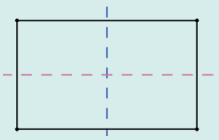
• Fără a folosi rigla gradată (pentru măsurare), desenăm un cerc și două diametre; capetele diametrelor determină dreptunghiul. Ce proprietăți ale cercului am folosit?

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ În paralelogramul $ABCD$ se știe că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.
Arătați că $ABCD$ este dreptunghi.
*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$
*Concluzie*: $ABCD$ dreptunghi
*Demonstrație*: Cele două unghiuri sunt suplementare (sunt consecutive în paralelogram) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot \sphericalangle A = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 90^\circ$, deci paralelogramul este dreptunghi.
*Un paralelogram cu două unghiuri consecutive congruente este dreptunghi.*

➢ Un patrulater convex cu două unghiuri drepte este dreptunghi? Dar dacă are trei unghiuri drepte?
*Rezolvare*. Dacă are doar două unghiuri drepte, consecutive sau opuse, patrulaterul nu este neapărat dreptunghi (desenați câte un patrulater care nu este dreptunghi în fiecare dintre cazuri). Dacă patrulaterul are trei unghiuri drepte, al patrulea are măsura $360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$, deci unghiul este drept.
*Orice patrulater convex cu trei unghiuri drepte este dreptunghi.*

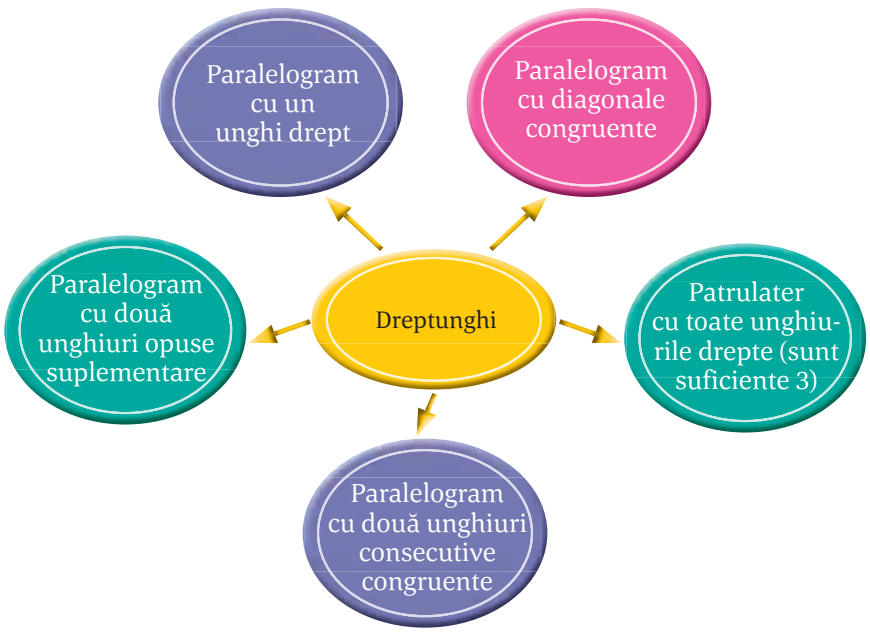
➢ Împăturiți o foaie de hârtie dreptunghiulară astfel încât două laturi opuse să se suprapună. Realizați operația pentru ambele perechi de laturi. Ce reprezintă, pentru dreptunghi, dreptele corespunzătoare urmelor rămase după ce desfacem hârtia?



*Rezolvare*. Dreptele respective sunt axele de simetrie ale dreptunghiului.
*Dreptunghiul are două axe de simetrie. Acestea sunt mediatoarele laturilor dreptunghiului.*

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Pentru ora următoare desenați și decupați dintr-un carton două triunghiuri isoscele congruente.

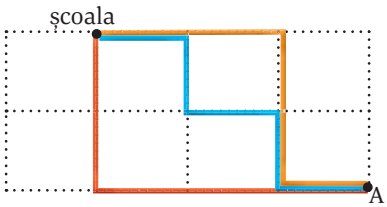



## PORTOFOLIU

Satul Bacova este o localitate din județul Timiș, în care toate străzile sunt paralele și formează dreptunghiuri.

✓ Documentați-vă cu privire la Bacova și realizați o scurtă prezentare turistică a așezământului.

✓ Un elev din Bacova, care locuiește în punctul A, vrea să ajungă la școală și nu se hotărăște pe care dintre cele 3 trasee, colorate pe desen, să meargă. Ce-l sfătuiți? De ce?



## EXERSAȚI!

**1.** Desenați dreptunghiul $ABCD$ în fiecare dintre următoarele situații:
a. $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm;
b. $AB = 7$ cm, $\sphericalangle BAC = 40°$;
c. $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm;
d. $AB = 8$ cm, $BD = 10$ cm;
e. $AC = 6$ cm, $\sphericalangle AOD = 50°$.

**2.** Precizați, pentru fiecare dintre următoarele situații, dacă dreptunghiul este bine determinat, în condițiile în care cunoaștem:
a. lungimile laturilor;
b. lungimea unei laturi și a unei diagonale;
c. lungimea unei laturi și măsura unghiului format de o diagonală cu latura respectivă;
d. lungimea unei laturi și măsura unghiului format de o diagonală cu o latură;
e. lungimea diagonalelor;
f. lungimea diagonalelor și măsura unghiului format de o diagonală cu o latură;
g. lungimea diagonalelor și măsura unghiului format de acestea.

**3.** Precizați, în următoarele cazuri, dacă patrulaterul este dreptunghi:
a. $BCDE$ paralelogram și $\sphericalangle D = 90°$;
b. $ACEG$ patrulater și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C \equiv \sphericalangle E \equiv \sphericalangle G$;
c. $MNPQ$ patrulater, $MN \parallel PQ$ și $\sphericalangle M = 90°$;
d. $ABCD$ patrulater, $AB \parallel CD$, $AB \equiv CD$ și $AC \equiv BD$;
e. $DEFG$ patrulater, $DE \parallel FG$, $DG \equiv FE$ și $\sphericalangle D = 90°$;
f. $LMNP$ patrulater, $LN \cap MP = \{O\}$ și $LO = MO = NO = PO$;
g. $HIJK$ paralelogram și $P_{\Delta HIJ} = P_{\Delta HIK}$.

**4.** Măsura unghiului format de o diagonală a unui dreptunghi cu o latură a sa este 55°. Atunci:
i. măsura unghiului format de aceeași diagonală cu cealaltă latură este:
a) 30°; b) 35°; c) 40°; d) 45°;
ii. măsura unghiului ascuțit format de diagonale este:
a) 55°; b) 60°; c) 65°; d) 70°.

**5.** Dacă măsura unghiului ascuțit format de diagonalele unui dreptunghi este 68°, atunci:
i. măsura unghiului obtuz format de diagonale este:
a) 102°; b) 112°; c) 122°; d) 132°;
ii. măsurile unghiurilor formate de o diagonală cu laturile sunt:
a) 68° și 22°; b) 66°și 24°;
c) 56° și 34°; d) 46° și 44°.

**6.** Fie $\Delta ABC$ dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$ și punctele $M$, $N$ și $P$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ respectiv $AC$. Demonstrați că $AMNP$ este dreptunghi.

**7.** În $\Delta ABC$ punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$ și $AC$. Construim perpendicularele $MP \perp BC$, $P \in BC$ și $NQ \perp BC$, $Q \in BC$.
a. Demonstrați că $MNQP$ este dreptunghi.
b. Dacă $BC = 16$ cm și lungimea înălțimii $AD$, $D \in BC$, a triunghiului este 10 cm, calculați $MN + NQ$.

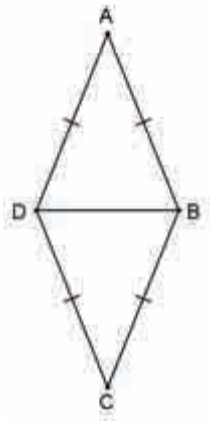
**8.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, considerăm mediana $AM$, $M \in BC$, și punctul $D$, simetricul punctului $A$ față de punctul $M$.
a. Demonstrați că patrulaterul $ABDC$ este dreptunghi.
b. Dacă, în plus, $\sphericalangle ABC = 30°$ și $AC = 4$ cm, calculați $P_{\Delta AMC}$.

**9.** În dreptunghiul $ABCD$, $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor, iar $M$ este mijlocul segmentului $AD$. Se știe că: $AC = 18$ cm și $\sphericalangle COD = 60°$.
a. Calculați măsura unghiului $ACB$.
b. Calculați perimetrul triunghiului $AOB$.
c. Dacă $BM \cap AC = \{P\}$, calculați lungimea segmentului $AP$.

**10.** În dreptunghiul $ABCD$, $AB > BC$, bisectoarea unghiului $A$ intersectează latura $DC$ în punctul $E$.
a. Demonstrați că $DE \equiv AD$.
b. Știind că $DE = 4$ cm și $\sphericalangle CAE = 15°$, calculați lungimea diagonalei $BD$.

# PARALELOGRAME PARTICULARE: ROMBUL ȘI PĂTRATUL

## ROMBUL




Așezati cele două triunghiuri isoscele, congruente, decupate pentru această oră, astfel încât bazele lor să coincidă. Ce figură geometrică ați obținut? Ce proprietăți în plus are figura obținută față de un paralelogram?

*Răspuns.* Se obține un paralelogram, pentru că laturile opuse sunt congruente două câte două. Observăm că figura are toate laturile congruente, și asta se datorează faptului că triunghiurile sunt isoscele, deci putem spune că paralelogramul construit astfel are două laturi consecutive congruente.

**DEFINIȚIE** Paralelogramul cu două laturi consecutive congruente se numește *romb*.

**OBSERVAȚIE**

Un romb este un paralelogram, deci are toate proprietățile acestuia. Enunțați aceste proprietăți folosind desenul de mai sus.

**TEOREMA 1** Într-un romb toate laturile sunt congruente.

**RECIPROCA TEOREMEI 1** Dacă un patrulater convex are toate laturile congruente, atunci el este romb.

*Ipoteză*: $ABCD$ patrulater convex, $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$
*Concluzie*: $ABCD$ romb
*Demonstrație*: $AB \equiv CD$ și $BC \equiv AD$, deci $ABCD$ este paralelogram și, cum $AB \equiv BC$, atunci el este romb.

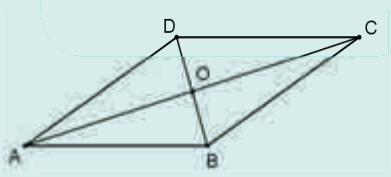
**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Fie rombul $ABCD$ având punctul de intersecție a diagonalelor $O$. Răspundeți următoarelor întrebări:

- Ce fel de triunghi este $\Delta ABD$?
- Ce reprezintă $AO$ în $\Delta ABD$?

*Răspunsuri.*

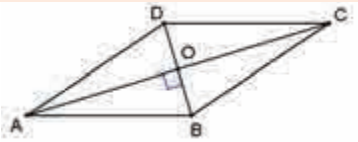
- $AB \equiv AD$, deci triunghiul $ABD$ este isoscel.
- $BO \equiv OD$, deci $AO$ este mediană în $\Delta ABD$ și, cum triunghiul este isoscel, $AO$ este și înălțime și bisectoare a unghiului $A$.



**TEOREMA 2** Într-un romb, diagonalele sunt perpendiculare.

Justificarea Teoremei 2 este prezentată în problema anterioară.

**RECIPROCA TEOREMEI 2** Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci el este romb.

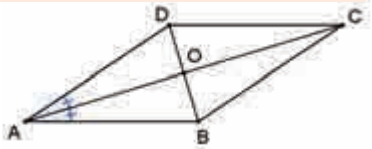



*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram, $AC \perp BD$
*Concluzie*: $ABCD$ romb
*Demonstrație*: În $\Delta ABD$, $AO$ este mediană (diagonalele se înjumătățesc). Cum $AC \perp BD$, obținem $AO \perp BD$, adică $AO$ este înălțime în triunghi. În $\Delta ABD$, $AO$ este și mediană și înălțime, deci triunghiul este isoscel, $AB \equiv AD$ și paralelogramul $ABCD$ devine romb.

**TEOREMA 3** Într-un romb, diagonalele sunt bisectoare ale unghiurilor corespunzătoare.

Justificarea Teoremei 3 este prezentată mai sus.

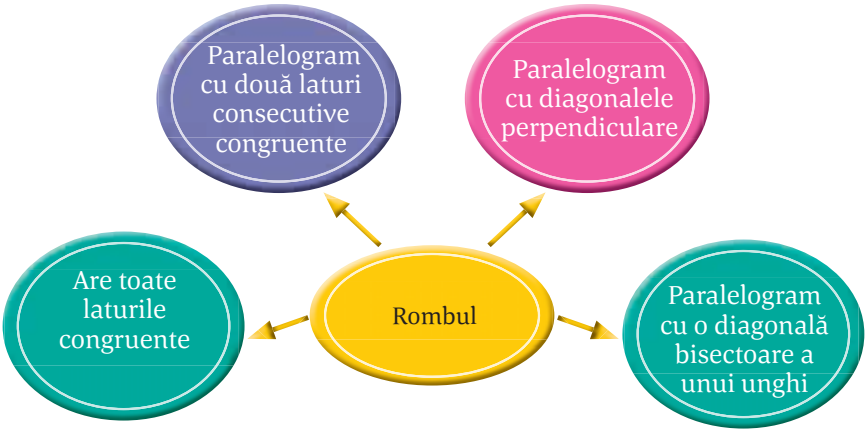
**RECIPROCA TEOREMEI 3** Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoare a unui unghi al acestuia, atunci el este romb.




*Ipoteză*: $ABCD$ paralelogram,
$AC$ bisectoare a unghiului $BAD$
*Concluzie*: $ABCD$ romb
*Demonstrație*: În $\Delta ABD$, $AO$ este mediană (diagonalele se înjumătățesc). Cum $AC$ este bisectoarea $\sphericalangle BAD$, obținem că $AO$ este bisectoare în $\Delta ABD$. În $\Delta ABD$, $AO$ este și mediană și bisectoare, deci triunghiul este isoscel, $AB \equiv AD$ și paralelogramul $ABCD$ devine romb.

**IMPORTANT**

Diagonalele rombului sunt axe de simetrie ale rombului.



# PĂTRATUL

**DEFINIȚIE**

Un patrulater cu toate laturile congruente și toate unghiurile congruente se numește *pătrat*.

## OBSERVAȚII



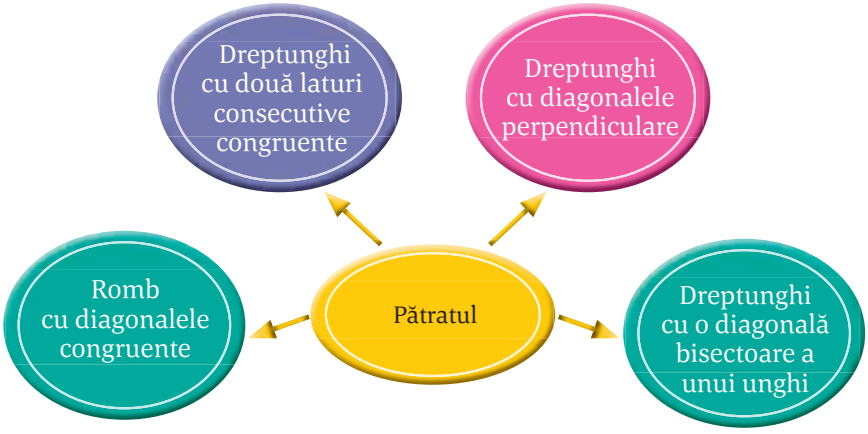

❖ Având toate laturile congruente, un pătrat este un caz particular de romb. Având toate unghiurile congruente, acestea sunt unghiuri drepte, deci pătratul este și un caz particular de dreptunghi.

Așadar, putem spune despre pătratul $ABCD$ că...

| ...este paralelogram, deci: | ...este dreptunghi, deci: | ...este romb, deci: |
|---|---|---|
| $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$<br>$AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$ | $AC \equiv BD$<br>$AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$ | $AC \perp BD$<br>Diagonalele sunt bisectoare ale unghiurilor |

❖ $\Delta OAB$, $\Delta OBC$, $\Delta OCD$ și $\Delta ODA$ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele.

❖ Pătratul are patru axe de simetrie: cele două mediatoare ale laturilor și diagonalele.



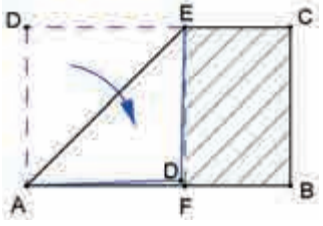

## NE AMINTIM!

Despre pătrat ați învățat încă din clasele primare și, probabil, este figura geometrică pe care ați folosit-o cel mai mult. Dintre toate figurile geometrice, pătratul are cea mai mare regularitate: are toate laturile, respectiv toate unghiurile, congruente.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Luați o foaie de hârtie A4 (dreptunghiulară) și îndoiți hârtia ca desenul alăturat: vârful stânga sus, $D$, să ajungă pe latura de jos, $AB$ (în punctul $F$). Eliminați partea rămasă, cea hașurată pe figură, și desfaceți hârtia. Sigur ați mai folosit această tehnică pentru a obține un pătrat dintr-o foaie de hârtie dreptunghiulară.

Problema 15 va demonstra faptul că bucata de hârtie rămasă este un pătrat.



## EXERSAȚI

*Rombul*

**1.** Într-un romb, unghiul format de o diagonală cu o latură are măsura de 35°. Calculați măsurile unghiurilor rombului.

**2.** Calculați măsurile unghiurilor unui romb, știind că o diagonală este congruentă cu laturile lui.

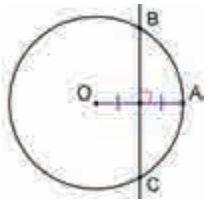
**3.** Desenați un romb, $ABCD$, știind că:
a. $AB = 5$ cm și $\sphericalangle A = 50°$;
b. $AB = 45$ mm și $AC = 7$ cm;
c. $AC = 8$ cm și $BD = 0,6$ dm;
d. $AB = 4$ cm și $\sphericalangle BAD = 70°$.

**4.** Precizați, în următoarele cazuri, dacă patrulaterul este romb:
a. $BCDE$: $BC = CD = DE = EB = 5$ cm;
b. $ACEG$: $AC \parallel EG$, $CE \parallel AG$, $CE = EG$;
c. $MNPQ$: $MN \equiv PQ$, $MN \parallel PQ$, $MP \perp NQ$;
d. $LMNP$: $LN \cap MP = \{O\}$, $LO \equiv ON$, $MO \equiv OP$, $\sphericalangle LMP \equiv \sphericalangle NMP$;
e. $DEFG$: $DE \parallel FG$, $DG \equiv EF$, $DF \perp GE$.

**5.** Considerăm paralelogramul $MNPQ$, astfel încât perimetrul $\Delta MNO$ este egal cu cel al $\Delta MQO$, $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrați că $MNPQ$ este romb.

**6.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB \equiv AC$, considerăm mediana $AM$, $M \in BC$, pe care o prelungim cu segmentul $MD$, $MD \equiv AM$. Arătați că $ABDC$ este paralelogram.

**7.** În figura alăturată, $AB$ este mediatoarea razei $OA$ a cercului de centru $O$. Demonstrați că $OBAC$ este romb.




**8.** Demonstrați că:
a. Mijloacele laturilor unui dreptunghi sunt vârfurile unui romb.
b. Mijloacele laturilor unui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.

**9.** În rombul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, $M$, $N$ și $P$ sunt picioarele perpendicularelor din $O$ pe laturile $AB$, $AD$, respectiv $DC$. Arătați că:
a. $OM \equiv ON \equiv OP$; b. $M$, $O$ și $P$ sunt coliniare.

**10.** În triunghiul dreptunghic $OAB$, $\sphericalangle O = 90°$, fie punctele $C$ și $D$ simetricele punctelor $A$, respectiv $B$, față de $O$. Demonstrați că $ABCD$ este romb.

**11.** În paralelogramul $ABCD$, $AB = 10$ cm și $AD = 5$ cm. $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$ și $CD$. Demonstrați că: a. $AN \perp DM$; b. $\sphericalangle ANB = 90°$.

---

*Pătratul*

**12.** Construiți un pătrat cu:
a. latura de 5 cm;
b. diagonalele de 6 cm.

**13.** Explicați cum desenați un pătrat care are vârfurile pe un cerc dat (spunem că pătratul este înscris în cerc). Desenați un cerc cu raza de 3 cm și un pătrat înscris în el.

**14.** Explicați cum desenați un cerc care să conțină vârfurile unui pătrat dat (spunem că cercul este circumscris pătratului). Desenați un pătrat cu latura de 5 cm și un cerc ce conține vârfurile lui.

**15.** Considerăm dreptunghiul $ABCD$, cu $AB > AD$. Punctul $E$ este situat pe latura $DC$, astfel încât $DE \equiv AD$. Construim $EF \perp AB$, $F \in AB$. Demonstrați că:
a. $AE$ este bisectoarea $\sphericalangle DAF$;
b. $ADEF$ este pătrat.

**16.** Considerăm două triunghiuri dreptunghice isoscele: $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$ și $\Delta DBC$, $\sphericalangle D = 90°$, $A \neq D$. Demonstrați că $ABDC$ este pătrat.

**17.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AD$ este bisectoarea unghiului $A$, $D \in BC$. Construim înălțimile $DE$, $E \in AB$ și $DF$, $F \in AC$ în triunghiurile $\Delta DAB$ și, respectiv, $\Delta DAC$. Demonstrați că $AEDF$ este pătrat.

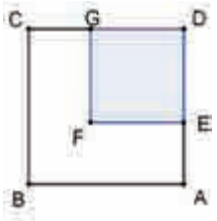
## EXERSAȚI

**18.** Fie $O$ punctul de intersecție al diagonalelor pătratului $MNPQ$. Demonstrați că:
a. patrulaterul determinat de mijloacele segmentelor $OM$, $ON$, $OP$ și $OQ$ este un pătrat;
b. patrulaterul determinat de simetricele punctului $O$ față de vârfurile pătratului este un pătrat.

**19.** În pătratul $ABCD$, punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ sunt situate pe laturile $AB$, $BC$, $CD$ respectiv $DA$, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$.
a. Stabiliți ce patrulater particular este $MNPQ$.
b. Demonstrați că $MP \perp NQ$.

**20.** Fie punctul $M$ situat pe diagonala $AC$ a pătratului $ABCD$. Demonstrați că:
a. $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle DMC$;
b. $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA$;
c. $BMDN$ este romb, unde $N$ este situat pe $AC$ și $AN \equiv CM$.

**21.** În figura alăturată, $ABCD$ și $DEFG$ sunt pătrate, iar punctul $G$ nu este mijlocul laturii $CD$. Demonstrați că:
a. $GE \parallel AC$;
b. punctele $B$, $F$ și $D$ sunt coliniare;
c. $\Delta FAC$ este isoscel.




**22.** În interiorul pătratului $ABCD$ considerăm un punct $E$ astfel încât $\Delta ABE$ să fie echilateral.
a. Demonstrați că:
i) $ED \equiv EC$; ii) $\sphericalangle ADE = 75°$.
b. Calculați măsura $\sphericalangle DEC$.

**23.** Pe diagonala $AC$ a pătratului $ABCD$, considerăm punctul $E$ astfel încât $AE \equiv AB$.
a. Calculați măsura $\sphericalangle ADE$.
b. Demonstrați că $DE$ este bisectoarea $\sphericalangle BDC$.
c. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului $EBD$.

**24.** Punctul $C$ este situat pe segmentul $AB$, $AC < CB$. De aceeași parte a dreptei $AB$ se construiesc pătratele $ACDE$ și $BCFG$.
a. Demonstrați că $EC \perp CG$.
b. Stabiliți poziția punctului $C$ pe segmentul $AB$ astfel încât $EF \perp FB$

**25.** Într-un pătrat $ABCD$, punctele $M$ și $N$ sunt situate pe laturile $AB$ și $BC$ astfel încât $AM \equiv BN$.
Demonstrați că:
a. $DM \equiv AN$;
b. $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle BAN$;
c. $DM \perp AN$

## APLICAȚIE PRACTICĂ

Observăm în poza alăturată un cric cu ajutorul căruia se ridică mașina. Suportul care este pe sol și suportul care susține mașina sunt poziționate în capetele diagonalelor rombului, această diagonală fiind perpendiculară pe cealaltă diagonală (reprezentată de șurub). Prin strângerea șurubului, vârfurile opuse se apropie, iar celelalte vârfuri se îndepărtează, dar patrulaterul rămâne tot romb. Există un moment, în timpul ridicării mașinii, în care rombul devine pătrat?



# TRAPEZUL: CLASIFICARE, PROPRIETĂȚI

**DEFINIȚIE**

Un patrulater convex care are două laturi opuse paralele și celelelalte două laturi neparalele se numește *trapez*.

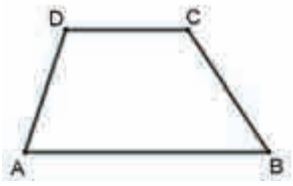


**NE AMINTIM**

Paralelogramele, deci și dreptunghiul, rombul și pătratul, sunt patrulatere convexe cu proprietatea că laturile opuse, în perechi, sunt paralele. În această lecție vom studia un alt caz particular de patrulatere.

**OBSERVAȚII**

Observă desenul: *ABCD* este trapez pentru că $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$




❖ Laturile paralele ale trapezului se numesc baze.

• Bazele diferă ca lungime. Explicați de ce!

• *AB baza mare*, *CD baza mică* (pentru desenul alăturat).

• Vom numi *AD* și *BC laturi neparalele*.

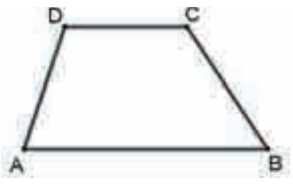
❖ De multe ori, în rezolvări, pentru a argumenta că un patrulater este trapez, arătăm că el are două laturi opuse paralele și necongruente.

**PROPRIETATE**

Folosind proprietatea paralelelor tăiate de o secantă, obținem următoarea proprietate:

În orice trapez, unghiurile alăturate unei laturi neparalele sunt suplementare.

*Ipoteză*: *ABCD* trapez, $AB \parallel CD$, $AD \nparallel BC$
*Concluzie*: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ sunt suplementare
*Demonstrație*: $AB \parallel CD$ și secanta *AD*, $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, deci sunt suplementare.




**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

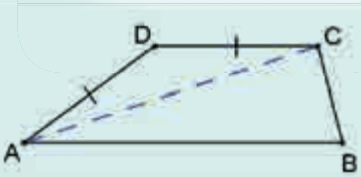
Considerăm trapezul *ABCD*, $AB \parallel CD$, în care $\sphericalangle A = 36°$ și $\sphericalangle C = 104°$.

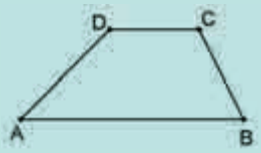
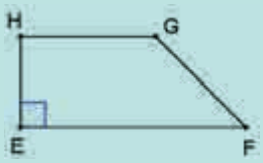
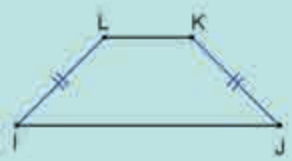
a. Calculați măsurile unghiurilor *B* și *D* ale trapezului.

b. Dacă, în plus, $AD \equiv DC$, demonstrați că diagonala *AC* este bisectoarea unghiului *A*.

*Rezolvare*. a. $\sphericalangle D = 180° - 36° = 144°$ și $\sphericalangle B = 180° - 104° = 76°$

b. $\Delta DAC$ isoscel: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = (180° - 144°) : 2 = 18°$ și, cum $\sphericalangle DAB = 36°$, obținem că *AC* este bisectoarea unghiului *A*.



| *Clasificare* | | |
|---|---|---|
| **trapez oarecare** | **trapez dreptunghic** | **trapez isoscel** |
| trapezul care are lungimi diferite ale laturilor neparalele și nu are unghiuri drepte | trapezul cu una dintre laturile neparalele perpendiculară pe baze (sau care are un unghi drept) | trapezul cu laturile neparalele congruente |
|   |   |   |
| *ABCD* trapez oarecare | *EFGH* trapez dreptunghic: $EF \parallel GH$, $HE \perp EF$ | *IJKL* trapez isoscel: $IJ \parallel KL$, $IL \equiv JK$ |

**DEFINIȚIE**

Se numește înălțime în trapez un segment determinat de punctele de intersecție ale bazelor cu o perpendiculară comună a lor.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Considerăm trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 60°$. Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$.

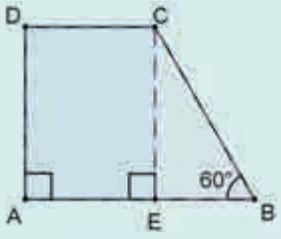
a. Demonstrați că $ADCE$ este dreptunghi.

b. Dacă $DC = 4$ cm și $BC = 6$ cm, calculați lungimea bazei mari $AB$.

*Ipoteză*: $ABCD$ trapez dreptunghic $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 60°$

*Concluzie*: a. $ADCE$ dreptunghi

b. $AB = ?$, știind că $DC = 4$ cm și $BC = 6$ cm



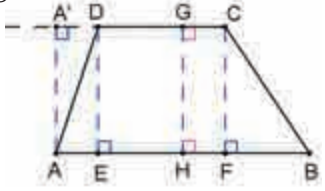

*Demonstrație*: a. $\sphericalangle A = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 90°$, deci $ADCE$ este dreptunghi;

b. $\Delta EBC$ este dreptunghic, $\sphericalangle B = 60°$, deci $\sphericalangle BCE = 30°$; din teorema unghiului de 30° obținem $BE = BC : 2 = 3$ cm. Cum $ADCE$ este dreptunghi, $AE = DC = 4$ cm, deci $AB = AE + EB = 7$ cm.

**DESCOPERIȚI**

✓ Observați cum în figura de mai jos sunt construite înălțimile prin vârfurile $A$, $D$ și $C$, precum și înălțimea $GH$.

✓ Înălțimile $DE$ și $CF$ împart trapezul în trei părți: triunghiurile dreptunghice $DAE$ și $CFB$, respectiv dreptunghiul $DEFC$.




## Linia mijlocie în trapez

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

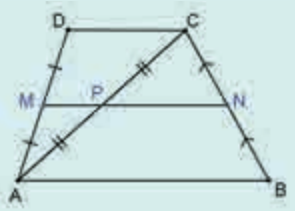
Considerăm trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, și punctele $M$, $N$ și $P$ mijloacele segmentelor $AD$, $BC$, respectiv $AC$.

Demonstrați că:

a. $MP \parallel AB$; b. punctele $M$, $N$ și $P$ sunt coliniare; c. $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

*Ipoteză*: $ABCD$ trapez, $M \in AD, AM = MD, N \in BC, BN = NC, P \in AC, AP = PC$

*Concluzie*: a. $MP \parallel AB$; b. $M, N$ și $P$ coliniare; c. $MN = \frac{AB + CD}{2}$.




*Demonstrație*:

a. $MP$ linie mijlocie în $\Delta ACD$, deci $MP \parallel CD$; $CD \parallel AB \Rightarrow MP \parallel AB$.

b. $NP$ linie mijlocie în $\Delta CAB$, deci $NP \parallel AB$; $MP \parallel AB$, iar prin $P$ nu putem construi două paralele la aceeași dreaptă, rezultă $M, N$ și $P$ coliniare.

c. Din proprietatea liniei mijlocii în triunghi, $MP = \frac{CD}{2}$ și $NP = \frac{AB}{2}$; deoarece punctele $M, N$ și $P$ sunt coliniare, rezultă $MN = MP + NP = \frac{AB + CD}{2}$

**DEFINIȚIE**

Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește *linia mijlocie a trapezului.*

**TEOREMA**

În orice trapez, linia mijlocie este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu jumătate din suma lungimilor bazelor.

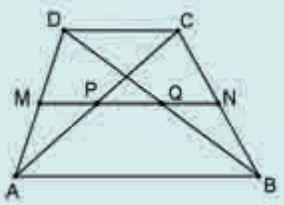
**IMPORTANT**

Lungimea segmentului determinat de punctele de intersecție ale diagonalelor cu linia mijlocie este jumătate din diferența lungimilor bazelor.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm și $CD = 6$ cm, iar $M, N, P$ și $Q$ sunt mijloacele segmentelor $AD, BC, AC$, respectiv $BD$. Calculați lungimile segmentelor $MN$ și $PQ$.

*Rezolvare.* Din formula liniei mijlocii în trapez: $MN = 9$ cm; $MP$ linie mijlocie în $\Delta ACD$ și $MQ$ linie mijlocie în $\Delta DAB$, așadar $MP = \frac{CD}{2}$, iar $MQ = \frac{AB}{2}$; obținem $PQ = \frac{AB - CD}{2} = 3$ cm.




• Demonstrați singuri faptul că punctele $M, P$ și $Q$ sunt coliniare.

## Trapezul isoscel, proprietăți

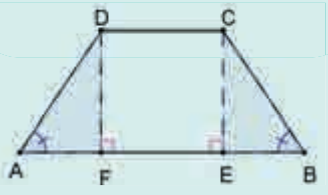
**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Fie trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD \equiv BC$, și înălțimile $CE$ și $DF$, $E \in AB$, $F \in AB$. Demonstrați că: $AF \equiv BE$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

*Ipoteză*: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD \equiv BC$, $CE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp AB$, $F \in AB$.

*Concluzie*: $AF \equiv BE$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$

*Demonstrație*: $DFEC$ este dreptunghi, deci $DF \equiv CE$.




$$\Delta DAF, \Delta CBE : \begin{vmatrix} AD \equiv BC \\ DF \equiv CE \end{vmatrix} \xrightarrow{CI} \Delta DAF \equiv \Delta CBE \Rightarrow \begin{vmatrix} AF \equiv BE \\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \end{vmatrix}$$

**TEOREMA 1** Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.

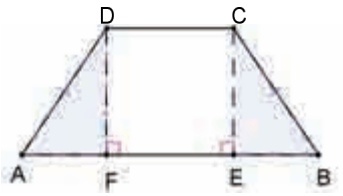
**RECIPROCA TEOREMEI 1** Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

*Demonstrarea Reciprocei Teoremei 1*:

*Ipoteză*: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$

*Concluzie*: $AD \equiv BC$

*Demonstrație*: Folosim aceleași înălțimi: $CE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp AB$, $F \in AB$; $DFEC$ este dreptunghi, deci $DF \equiv CE$.




Demonstrați singuri congruența $\Delta DAF \equiv \Delta CBE$ și concluzia reciprocei.

**OBSERVAȚIE**

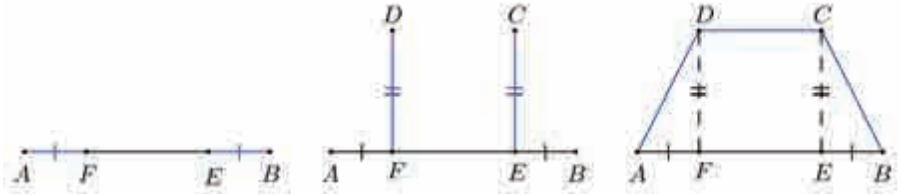
Înălțimile $DF$ și $CE$ împart trapezul în trei părți, un dreptunghi și două triunghiuri. Observăm că, în cazul trapezului isoscel, cele două triunghiuri sunt congruente. Așadar segmentele $AF$ și $BE$ sunt congruente. Lungimea acestora este egală cu jumătate din diferența lungimilor bazelor.

Scrieți relația matematică a propoziției anterioare.

**DESCOPERIȚI**

În problema anterioară, am demonstrat că unghiurile alăturate bazei mari sunt congruente. Discutați la nivelul clasei o strategie de lucru pentru a demonstra că și unghiurile alăturate bazei mici sunt congruente.

Observația anterioară ne sugerează o *metodă de construcție a unui trapez isoscel*: construim baza mare $AB$ pe care marcăm punctele $F$ și $E$, astfel încât $AF < FB$ și $AF \equiv EB$. În cele două puncte *construim cu linie întreruptă*, de aceeași parte a dreptei $AB$, perpendicularele $FD$ și $EC$ pe $AB$, astfel încât $FD \equiv EC$. Obținem $ABCD$ trapez isoscel.



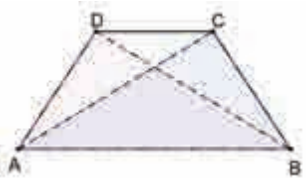

Explicați ce se modifică în cazul în care $AF > FB$.

**TEOREMA 2** Într-un trapez isoscel, diagonalele sunt congruente.

*Ipoteză*: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$, $AD \equiv BC$ ($\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$)

*Concluzie*: $AC \equiv BD$

*Demonstrație*: Folosind cazul de congruență LUL se demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (demonstrați), de unde rezultă că $AC \equiv BD$.

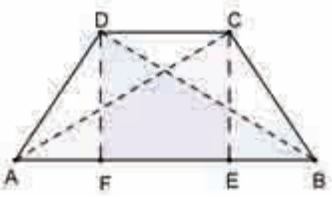


**RECIPROCA TEOREMEI 2**

Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

*Ipoteză*: $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$, $AC \equiv BD$

*Concluzie*: $ABCD$ trapez isoscel ($AD \equiv BC$ sau $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$)



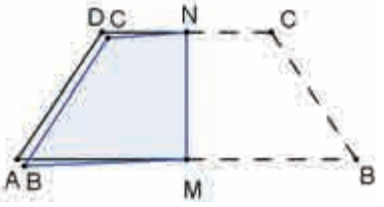

*Demonstrație*: Construim înălțimile $CE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp AB$, $F \in AB$, $DF \equiv CE$;
$\Delta DBF \equiv \Delta CAE$ (CI) (demonstrați), deci $\sphericalangle DBF \equiv \sphericalangle CAE$;
$\Delta DBA \equiv \Delta CAB$ (demonstrați congruența) implică $AD \equiv BC$.

**IMPORTANT**

Trapezul isoscel are o axă de simetrie, mediatoarea comună a celor două baze.

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Decupați dintr-un carton un trapez isoscel și îndoiți-l astfel încât vârfurile bazei mari să coincidă. Punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele celor două baze, iar $MN$ este mediatoarea bazelor.




## EXERSAȚI

**1.** Considerăm un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$. Completați tabelul următor:

| Ipoteză: | Concluzie: |
|---|---|
| a. $\sphericalangle BAD = 70°$, $\sphericalangle BCD = 100°$ | $\sphericalangle ADC = ?$, $\sphericalangle ABC = ?$ |
| b. $\sphericalangle ABC = 120°$, $\sphericalangle ADC = 50°$ | $\sphericalangle BAD = ?$ , $\sphericalangle BCD = ?$ |
| c. $DA \perp AB$, $\sphericalangle B = 30°$. | $\sphericalangle ADC = ?$, $\sphericalangle DCB = ?$ |

**2.** Desenați trapezul, în fiecare dintre cazurile:
a. $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 5$ cm, $\sphericalangle B = 50°$, $BC = 4$ cm și $CD = 2$ cm;
b. $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $\sphericalangle M = 90°$, $\sphericalangle N = 60°$, $MN = 6$ cm și $NP = 4$ cm;
c. $DEFG$ isoscel, $DE \parallel FG$, $\sphericalangle D = \sphericalangle E = 60°$, $DE = 7$ cm și $DG = 3$ cm.

**3.** În trapezul $CDEF$, $CD \parallel EF$, $\sphericalangle DEF = 65°$. Atunci:
i. Baza mare a trapezului este:
a) $CD$; b) $DE$; c) $EF$; d) $FC$;
ii. Măsura unghiului $CDE$ este egală cu:
a) 110°; b) 115°; c) 120°; d) 125°;
iii. Măsura unghiului $CFE$ este egală cu:
a) 60°; b) 65°; c) 70°; d) nu se poate determina.

**4.** Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, punctele $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AD$, respectiv $BC$, iar punctele $P$ și $Q$ reprezintă intersecția lui $MN$ cu diagonala $AC$, respectiv cu $BD$. Calculați:
a. $MN$ și $PQ$, dacă $AB = 12$ cm și $CD = 8$ cm;
b. $DC$ și $PQ$, dacă $AB = 14$ cm și $MN = 10$ cm;
c. $AB$ și $CD$, dacă $MN = 15$ cm și $PQ = 7$ cm.
d. Lungimile bazelor, știind că acestea sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive, iar lungimea liniei mijlocii este 13 cm.

**5.** În triunghiul $ABC$, cu $AC = 24$ cm, considerăm punctele: $M$ mijlocul lui $AB$, $N$ mijlocul lui $BC$, $P$ mijlocul lui $AM$ și $Q$ mijlocul lui $CN$. Calculați:
a. lungimea segmentului $PQ$, dacă $AC = 24$ cm;
b. lungimea laturii $AC$, dacă $PQ = 15$ cm.

## EXERSAȚI

**6.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 50°$ și $\sphericalangle B = 40°$, iar $E$ este situat pe latura $AB$ astfel încât $CE \parallel AD$.
a. Calculați măsurile unghiurilor $BCD$ și $ADC$.
b. Demonstrați că $EC \perp BC$.
c. Dacă $M$, $N$ și $P$ sunt mijloacele segmentelor $AD$, $BC$, respectiv $EC$, demonstrați că cele trei puncte sunt coliniare, precum și formula lungimii liniei mijlocii a trapezului (folosind lungimea lui $MP$ și a lui $PN$).

**7.** În dreptunghiul $ABCD$, punctele $M$ și $N$ sunt situate pe latura $DC$ astfel încât $DM \equiv NC$ și $DM < \frac{DC}{2}$. Demonstrați că $ABNM$ este trapez isoscel.

**8.** În trapezul dreptunghic $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $\sphericalangle M = 90°$, $MN = 12$ cm și $PQ = 5$ cm.
a. Dacă $\sphericalangle N = 45°$, calculați lungimea laturii $MQ$.
b. Dacă $\sphericalangle N = 60°$, calculați lungimea laturii $NP$.

**9.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, lungimea bazei mici $CD$ este 5 cm, iar triunghiul $ABC$ este echilateral.
a. Calculați lungimea bazei mari.
b. Dacă $AE$, $E \in BC$, este mediana triunghiului $ABC$, iar $CF$, $F \in AD$, este bisectoarea unghiului $ACD$, arătați că $AECF$ este trapez dreptunghic.

**10.** În pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $E$ și $F$ sunt simetricele punctului $O$ față de punctul $A$, respectiv $B$. Demonstrați că $EFCD$ este trapez isoscel.

**11.** Calculați măsurile unghiurilor unui trapez isoscel, $ABCD$, $AB \parallel CD$, știind că:
a. $\sphericalangle A = 70°$; b. $\sphericalangle C = 130°$; c. $\sphericalangle D = 2 \cdot \sphericalangle A$;
d. $\sphericalangle B$ are măsura cu 40° mai mică decât măsura $\sphericalangle C$.

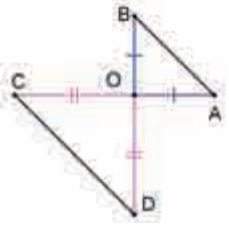
**12.** Considerăm trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$ și punctul $E$, situat pe baza mare $AB$, astfel încât $B$ se află între $A$ și $E$, iar $BE = CD$. Arătați că $\Delta CAE$ este isoscel.

**13.** Fie trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul $E$, simetricul punctului $D$ față de dreapta $AB$. Demonstrați că: a. $AE \parallel BC$; b. $BE \parallel AC$.

**14.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, punctul $E$ este situat pe latura $AB$ astfel încât $CE \equiv AD$. Demonstrați că $AECD$ este paralelogram.

**15.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB \equiv AC$, fie $M \in AB$ și $N \in AC$. Demonstrați că $BCNM$ este trapez isoscel în fiecare dintre situațiile:
a. $M$ mijlocul laturii $AB$ și $N$ mijlocul laturii $AC$;
b. $MN \parallel BC$; c. $AM \equiv AN$.

**16.** În figura alăturată, $OAB$ și $OCD$ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele, iar punctele $A$, $O$ și $C$ sunt coliniare. Demonstrați că: a. $B$, $O$ și $D$ sunt coliniare; b. $AB \parallel CD$; c. $ABCD$ trapez isoscel.




**17.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$ și $AB < CD$, punctele $E$ și $F$ sunt mijloacele laturilor $AD$, respectiv $BC$, iar $M \in CD$ este piciorul perpendicularei din $B$ pe $CD$. Demonstrați că $DMFE$ este paralelogram.

**18.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, punctul $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor. Demonstrați că:
a. triunghiurile $OAB$ și $OCD$ sunt isoscele.
b. triunghiurile $OAD$ și $OBC$ sunt congruente.

**19.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle B = 60°$ și $AD = DC = CB = 4$ cm. Paralela prin $C$ la $AD$ intersectează $AB$ în punctul $E$.
a. Demonstrați că triunghiul $CEB$ este echilateral.
b. Calculați lungimea laturii $AB$.
c. Demonstrați că $AC \perp CB$.

**20.** În triunghiul $ABC$, cu $AB < AC$, punctele $M$, $N$ și $P$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $BC$, respectiv $AC$, iar $AD$, $D \in BC$, este înălțime. Demonstrați că:
a. $DM \equiv NP$; b. $MPND$ este trapez isoscel.

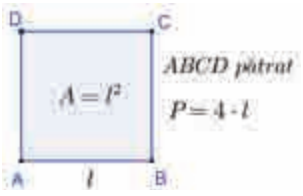
**21.** Desenați un trapez isoscel și prelungiți laturile neparalele până ce acestea se intersectează. Ce fel de triunghi obțineți? Explicați cum se poate desena un trapez isoscel pornind de la un triunghi isoscel desenat!

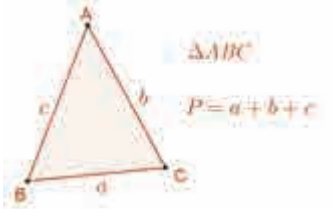
# PERIMETRE ȘI ARII

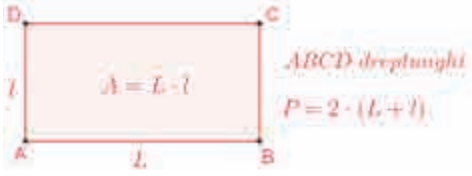
## NE AMINTIM!

✓ Ați învățat în clasa a V-a despre perimetre și arii.
- Perimetrul unui poligon a fost definit ca suma lungimilor laturilor sale.
- Aria reprezintă o măsură a suprafeței, care arată de câte ori se cuprinde o anumită unitate de măsură în acea suprafață.

✓ Pentru poligoanele studiate până în prezent, cunoașteți:

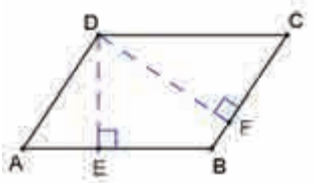



✓ Ținând cont de definiția congruenței a două figuri geometrice (sunt congruente dacă, prin suprapunere, ele coincid), putem afirma: *Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci ele au aceeași arie.*

## PARALELOGRAMUL




În paralelogramul $ABCD$ construim $DE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp BC$, $F \in BC$. Având în vedere că $AB \parallel DC$, obținem că $ED \perp DC$; cu alte cuvinte, $DE$ este o perpendiculară comună a celor două laturi $AB$ și $DC$.

Arătați că $DF$ este o perpendiculară comună a celor două laturi $AD$ și $BC$.

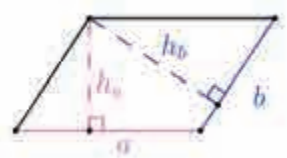
**DEFINIȚIE**

Se numește *înălțime în paralelogram* segmentul determinat de un vârf al paralelogramului și piciorul perpendicularei duse din acel vârf pe dreapta suport a uneia dintre laturile care nu conțin vârful.

## IMPORTANT

Din vârful $D$ al paralelogramului $ABCD$ se pot construi două înălțimi:
- $DE \perp AB$, $E \in AB$, $DE$ este înălțimea corespunzătoare laturii $AB$;
- $DF \perp BC$, $F \in BC$, $DF$ este înălțimea corespunzătoare laturii $BC$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!




❖ Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea unei înălțimi corespunzătoare laturii:

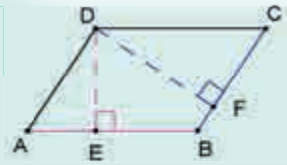
$A_{paralelogram} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

❖ Perimetrul unui paralelogram este egal cu dublul sumei lungimilor a două laturi consecutive ale acestuia:

$P_{paralelogram} = 2 \cdot (a + b)$

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În paralelogramul $ABCD$ considerăm înălțimile $DE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp BC$, $F \in BC$. Știind că $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm și $DE = 8$ cm, calculați perimetrul și aria paralelogramului și lungimea înălțimii $DF$.

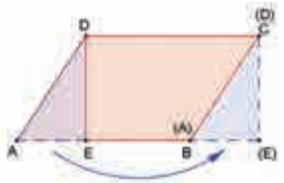



*Rezolvare.*

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 44$ cm; $A_{ABCD} = AB \cdot DE \Rightarrow A_{ABCD} = 96$ cm$^2$, iar aria paralelogramului poate fi exprimată și ca $A_{ABCD} = BC \cdot DF$, deci $96 = 10 \cdot DF \Rightarrow DF = 9{,}6$ cm.

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Desenați pe un carton un paralelogram $ABCD$ și înălțimea $DE \perp AB$, $E \in AB$. Decupați-l, apoi decupați din el triunghiul $ADE$. Poziționați triunghiul $ADE$ astfel încât latura $AD$ să se suprapună laturii $BC$. Ce legătură este între aria paralelogramului inițial și aria figurii obținute?



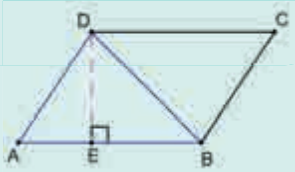

## TRIUNGHIUL

Oricare dintre diagonalele unui paralelogram împarte paralelogramul în două triunghiuri congruente. Putem afirma astfel că:

*Aria oricărui triunghi dintre cele două astfel formate este jumătate din aria paralelogramului.*

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În paralelogramul $ABCD$, $DE \perp AB$, $E \in AB$, $AB = 12$ cm și $DE = 8$ cm. Ce rol joacă $AB$ și $DE$ în paralelogram? Dar în triunghiul $DAB$? Calculați aria paralelogramului și aria triunghiului $DAB$.




*Rezolvare.*

$A_{ABCD} = AB \cdot DE \Rightarrow A_{ABCD} = 96$ cm$^2$;

$\Delta DAB \equiv \Delta BCD \Rightarrow A_{\Delta DAB} = A_{\Delta BCD} = A_{ABCD} : 2 = 48$ cm$^2$.

Putem exprima aria triunghiului $DAB$ astfel: $A_{\Delta DAB} = \frac{AB \cdot DE}{2}$.

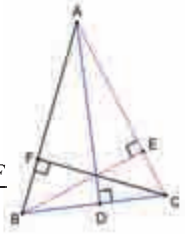
**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Decupați dintr-un carton patru triunghiuri dreptunghice (dar nu și isoscele) congruente. Poziționați-le, două câte două, astfel încât triunghiurile din fiecare pereche să aibă în comun câte o catetă – în prima pereche, cateta de lungime mai mare, în a doua pereche, cea de lungime mai mică. Noile triunghiuri obținute sunt congruente? Au ele aceeași arie? Formulați o concluzie!

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

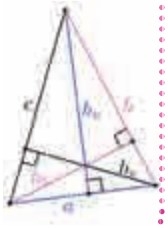
Aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia:

$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$ sau $A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BE}{2}$ sau $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot CF}{2}$

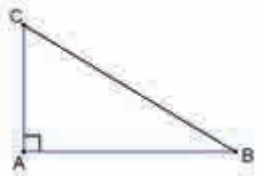


**IMPORTANT**

În orice triunghi, produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare este constant, adică *lungimile laturilor unui triunghi sunt invers proporționale cu lungimile înălțimilor corespunzătoare:* $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

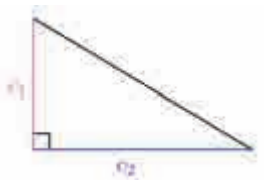


În cazul triunghiului dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, cateta $CA$ este înălțimea corespunzătoare laturii (catetei) $AB$, deci aria se exprimă: $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$. Așadar:



**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din produsul lungimilor catetelor. $A_{\text{triunghi dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$



**DESCOPERIȚI**

✓ Generalizând problema rezolvată alăturat obținem:

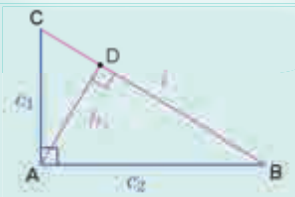
$$\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow$$

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Leftrightarrow h_i = \frac{c_1 \cdot c_2}{i}$$

✓ Așadar, într-un triunghi dreptunghic lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, construim înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$. Știind că $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm, calculați aria triunghiului și lungimea înălțimii $AD$.

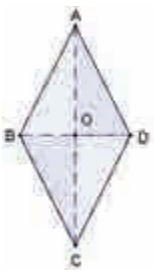


*Rezolvare.* $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow$ $A_{\Delta ABC} = 24\ \text{cm}^2$.

Exprimăm aria triunghiului folosind ipotenuza și înălțimea corespunzătoare $A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$ și, înlocuind valorile cunoscute, obținem: $24 = \frac{10 \cdot AD}{2} \Rightarrow AD = 4{,}8$ cm.

## ROMBUL

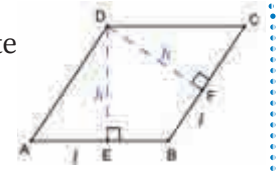
Considerăm rombul $ABCD$ din figura alăturată; punctul $O$ este intersecția celor două diagonale. Cele patru triunghiuri dreptunghice de vârf $O$ și ipotenuze laturile rombului sunt congruente, iar suprafețele lor, împreună, acoperă toată suprafața rombului.



- $A_{\Delta AOB} = A_{\Delta AOD} = A_{\Delta COB} = A_{\Delta COD}$ și $A_{\Delta AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2}$;
- $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{\Delta AOB} = \frac{2 \cdot AO \cdot 2 \cdot BO}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

**OBSERVAȚIE**

Să observăm în rombul din desenul alăturat cele două înălțimi construite din vârful $D$. Deoarece $\Delta ADE \equiv \Delta CDF$ (demonstrați!), obținem $DE \equiv DF$.



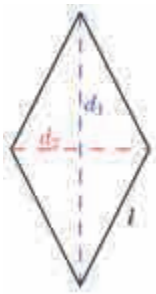
Așadar, *în romb, lungimile înălțimilor construite din același* vârf sunt egale și reprezintă distanța dintre dreptele suport ale laturilor opuse.

Notând cu $l$ lungimea laturii rombului și cu $h$ lungimea înălțimii: $A_{romb} = l \cdot h$.

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

❖ Aria unui romb este egală cu jumătate din produsul lungimilor diagonalelor: $A_{romb} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, unde $d_1$ și $d_2$ sunt lungimile diagonalelor

❖ Perimetrul unui romb este de patru ori lungimea unei laturi: $P_{romb} = 4 \cdot l$, unde $l$ este lungimea laturii.

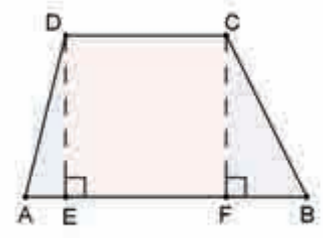



**IMPORTANT**

Rombul este un caz particular de paralelogram, deci pentru calculul ariei unui romb se folosește și formula generală de calcul a ariei oricărui paralelogram.

## TRAPEZUL

Suprafața trapezului din figura alăturată este împărțită de cele două înălțimi, $DE$ și $CF$, în două suprafețe triunghiulare și una dreptunghiulară.

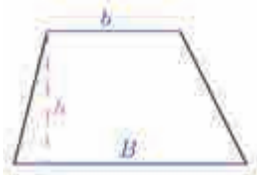



- $DEFC$ este dreptunghi: $DE \equiv CF$ și $DC \equiv EF$;
- $A_{\Delta DAE} = \frac{AE \cdot DE}{2}$, $A_{DEFC} = DE \cdot EF$ și $A_{\Delta CFB} = \frac{CF \cdot FB}{2}$.
- Însumând, obținem: $A_{ABCD} = \frac{AE \cdot DE + 2 \cdot DE \cdot EF + CF \cdot FB}{2}$
- Dacă ținem cont de congruențele $DE \equiv CF$ și $DC \equiv EF$ obținem:

$$A_{ABCD} = \frac{DE \cdot (AE + 2 \cdot EF + FB)}{2} = \frac{DE \cdot (AE + EF + FB + CD)}{2} = \frac{DE \cdot (AB + CD)}{2}.$$

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

Aria unui trapez este egală cu jumătate din produsul dintre suma lungimilor bazelor și lungimea înălțimii:
$A_{trapez} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$, unde $B$ și $b$ sunt lungimile bazelor și $h$ este lungimea înălțimii.




**IMPORTANT**

Aria unui trapez este produsul dintre lungimea liniei mijlocii și lungimea înălțimii.

**ATENȚIE**

Despre două *figuri geometrice* care au aceeași arie spunem că sunt *echivalente*.

**DESCOPERIȚI**

Construiți o diagonală în trapez și colaborați cu colegii pentru a da o altă demonstrație a formulei ariei acestuia!

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Formați echipe și desenați un romb cu latura de 5 cm, astfel încât măsura unghiului ascuțit al rombului să fie: la o echipă 40 , la a doua echipă 50 și așa mai departe. Una dintre echipe va desena un pătrat cu latura de 5 cm. Calculați și comparați ariile figurilor desenate (la romb desenați și măsurați înălțimea). Formulați o concluzie și argumentați-o!

## EXERSAȚI

**1.** Calculați perimetrul și aria unui:
a. dreptunghi, cu lungimile a două dintre laturi egale cu 8 cm și 12 cm;
b. pătrat, cu lungimea laturii de 8 cm;
c. romb, cu lungimea diagonalelor de 12 cm și 16 cm (aplicați teorema lui Pitagora pentru calculul lungimii laturii rombului).

**2.** Perimetrul unui paralelogram este 30 cm, iar una dintre laturi are lungimea de 6 cm. Calculați lungimile tuturor laturilor paralelogramului.

**3.** Asociați fiecărei litere din coloana A numărul corespunzător din coloana B:

| *ABCD* dreptunghi: | A |
|---|---|
| $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm | a. |
| $AD = 4$ cm, $AB = 2AD$ | b. |
| $AB = \frac{2}{3}BC$, $AD = 0,6$ dm | c. |
| $AB = 5$ cm, $BC = 80\%$ din $AB$ | d. |

| B | Perimetrul lui *ABCD* |
|---|---|
| 1. | 24 cm |
| 2. | 20 cm |
| 3. | 18 cm |
| 4. | 16 cm |
| 5. | 14 cm |

**4.** Calculați aria unui pătrat, știind că perimetrul acestuia este 24 cm.

**5.** Un pătrat și un dreptunghi au ariile egale, iar latura pătratului are lungimea egală cu 8 cm. Calculați perimetrul dreptunghiului, știind că lungimea acestuia este de 4 ori mai mare decât lățimea.

**6.** Desenați:
a. trei dreptunghiuri, cu aria de 20 $cm^2$ (fiecare) și cu perimetre diferite;
b. trei dreptunghiuri, cu arii diferite, fiecare dintre ele cu perimetrul de 20 cm;
c. două triunghiuri dreptunghice necongruente, cu aria de 12 $cm^2$ (fiecare);
d. trei triunghiuri, oricare două necongruente, cu aria de 20 $cm^2$ (fiecare);
e. trei figuri geometrice diferite, cu aria de 16 $cm^2$ (fiecare).

**7.** Desenați trei dreptunghiuri diferite și un pătrat, fiecare dintre ele cu perimetrul egal cu 28 cm. Calculați ariile figurilor desenate și ordonați valorile obținute crescător.

**8.** Calculați aria unui:
a. paralelogram, cu lungimea unei laturi de 10 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare de 6 cm;
b. triunghi, cu lungimea unei laturi de 9 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare de 6 cm;
c. romb, cu lungimea laturii de 6 cm și lungimea unei înălțimi de 4 cm;
d. trapez, cu lungimile bazelor de 10 cm și 0,7 dm și lungimea înălțimii de 4 cm.

**9.** În paralelogramul *ABCD*, cu $AB = 9$ cm și $AD = 6$ cm, construim înălțimile $DE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp BC$, $F \in BC$. Știind că $DE = 4$ cm, calculați:
a. aria paralelogramului *ABCD*;
b. lungimea segmentului *DF*.

**10.** În paralelogramul *ABCD*, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și $\sphericalangle BAD = 30°$. Calculați aria paralelogramului.

**11.** În paralelogramul *ABCD*, $AD = 6$ cm, $\sphericalangle BAD = 45°$, iar diagonala *BD* este congruentă cu latura *BC*. Calculați aria paralelogramului.

**12.** În triunghiul *ABC* considerăm înălțimile $BD$, $D \in AC$ și $CE$, $E \in AB$. Știind că $AB = 10$ cm, $AC = 9$ cm și $BD = 8$ cm calculați:
a. aria triunghiului *ABC*;
b. lungimea segmentului *CE*.

**13.** În triunghiul isoscel *ABC*, $AB \equiv AC$, considerăm mediana *AM*, $M \in BC$. Știind că $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm și $AM = 8$ cm, calculați:
a. $A_{\Delta ABC}$;
b. lungimea înălțimii corespunzătoare laturii *AC*.

## EXERSAȚI

**14.** Considerăm triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 12$ cm și $AC = 5$ cm.
a. Demonstrați că $BC = 13$ cm.
b. Calculați perimetrul și aria triunghiului.
c. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, calculați lungimea lui $AD$.

**15.** În triunghiul $ABC$, $BC = 7$ cm, $AB = 4$ cm și $\sphericalangle B = 30°$. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii $BC$ și aria triunghiului.

**16.** Considerăm triunghiul $ABC$ și mediana $AM$, $M \in BC$ a acestuia. Demonstrați că triunghiurile $ABM$ și $ACM$ au aceeași arie (sunt echivalente).

**17.** Calculați aria rombului $ABCD$, știind că are lungimea laturii egală cu 12 cm și $\sphericalangle A = 150°$.

**18.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, se consideră $CE \perp AB$, $E \in AB$. Știind că $AB = 12$ cm, $CD = 0,(6) \cdot AB$ și $CE = 5$ cm, calculați aria trapezului $ABCD$, aria triunghiului $BEC$ și cât la sută din aria patrulaterului $AECD$ reprezintă aria triunghiului $BEC$.

**19.** Considerăm trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, în care $\sphericalangle C = 45°$, $AB = 6$ cm și $CD = 14$ cm. Calculați lungimea înălțimii și aria trapezului.

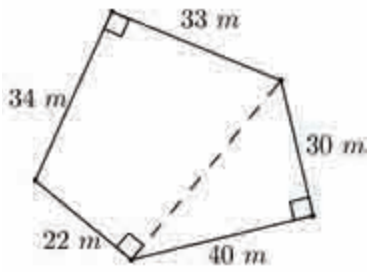
**20.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, se știe că $\sphericalangle B = 30°$, $AB = 11$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm și $CD = 5$ cm. Calculați lungimea înălțimii și aria trapezului.

**21.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, se știe că $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 12$ cm, $AD = 5\sqrt{3}$ cm și $CD = 7$ cm. Calculați lungimea laturii $BC$ și aria trapezului $ABCD$.

**22.** Demonstrați că suma distanțelor de la un punct situat în interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este egală cu lungimea unei înălțimi a triunghiului.

**23.** Demonstrați că, oricum am alege un punct în interiorul bazei unui triunghi isoscel, suma lungimilor distanțelor de la un astfel de punct la laturile congruente ale triunghiului dat este constantă.

**24.** Folosind informațiile prezentate pe desen, calculați perimetrul și aria suprafeței reprezentată schematic în figura alăturată.

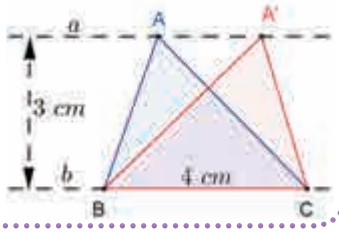



În timpul rezolvării este posibil să fie necesar să vă reamintiți *Teorema lui Pitagora*.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

În figura alăturată dreptele $a$ și $b$ sunt paralele. Calculați ariile triunghiurilor $ABC$ și $A'B'C'$. Ce constatați? Dar dacă punctul $A'$ se *îndepărtează* de punctul $A$, cum se modifică aria triunghiului ?

Veți observa cum, prin îndepărtarea lui $A'$ de $A$, *perimetrul triunghiului crește* și totuși *aria lui rămâne* aceeași!!!



PROBLEME RECAPITULATIVE

**1.** Un patrulater are măsurile a trei dintre unghiuri numere naturale consecutive, iar al patrulea, unghi drept. Arătați că două dintre unghiurile patrulaterului sunt congruente.

**2.** În patrulaterul $ABCD$, $AB \equiv BC$ și $CD \equiv DA$. Demonstrați că $AC \perp BD$ și faptul că $BD$ este bisectoare a unghiului $ABC$.

*Ați observat probabil faptul că patrulaterul ABCD are proprietăți comune cu rombul. Discutați la nivelul clasei și identificați cel puțin două condiții suplimentare care să conducă, fiecare dintre ele, la concluzia că ABCD este romb.*

**3.** În patrulaterul convex $ABCD$ măsurile unghiurilor $A$, $B$, $C$ și $D$ sunt direct proporționale cu numerele 2, 4, 6 respectiv 8.
a. Demonstrați că măsura unghiului $A$ este 36°.
b. Dacă bisectoarea unghiului $ADC$ intersectează latura $AB$ în punctul $E$, demonstrați că:
i. $AD \equiv DE$; ii. patrulaterul $BCDE$ este paralelogram.

**4.** Un perete în formă de dreptunghi are lungimea de 3,6 m și înălțimea de 2,4 m. Calculați câte plăci de faianță, în formă de pătrat cu latura de 40 cm, sunt necesare pentru a acoperi în întregime peretele.

**5.** În dreptunghiul $ABCD$ punctul $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor $AC$ și $BD$.
a. Dacă $AB = 7$ cm și $BC = 0,5$ dm, calculați perimetrul dreptunghiului.
b. Știind că $AB = 6$ dm și $BC = \frac{2}{3}AB$, calculați perimetrul dreptunghiului.
c. Aflați lungimea laturii $AB$, știind că este jumătate din lungimea laturii $AD$ și perimetrul dreptunghiului este 18cm.
d. Dacă $AO = 4$ cm, calculați $AC + BD$.

**6.** Un paralelogram are lungimea unei laturi de 18 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii de 8 cm. Calculați latura unui pătrat cu aria egală cu cea a paralelogramului.

**7.** Arătați că un paralelogram în care măsura unui unghi este egală cu media aritmetică a măsurilor altor două unghiuri este dreptunghi.

**8.** Considerăm paralelogramul $ABCD$ astfel încât mediatoarele laturilor $AB$ și $BC$ conțin punctul $D$. Demonstrați că $ABCD$ este romb.

**9.** În triunghiul $ABC$, $AM$ este mediană, $M \in BC$, $AM = 8$ cm și $BC = 10$ cm. Paralela prin $B$ la $AM$ intersectează dreapta $AC$ în punctul $N$, iar paralela prin $C$ la $AB$ intersectează $AB$ în punctul $P$. Demonstrați că patrulaterul $BCPN$ este paralelogram și calculați perimetrul acestuia.

**10.** În paralelogramul $ABCD$ latura $AB$ este mai mare decât latura $CD$. Punctul $M$ aparține laturii $AB$ astfel încât $BM \equiv BC$, iar punctul $N$ este situat pe prelungirea laturii $DA$, dincolo de $A$, astfel încât $DN \equiv DC$. Demonstrați că punctele $N$, $M$ și $C$ sunt coliniare.

**11.** Considerăm $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$, două unghiuri adiacente suplementare și punctele $M$ și $N$, proiecțiile punctului $A$ pe bisectoarele lor. Demonstrați că:
a. $MN \equiv AO$ b. $MN \parallel BC$ (sau $BO$ ar fi mai simplu, sau $AO$)

**12.** În paralelogramul $ABCD$, $\sphericalangle A < 90°$, se construiesc $DM \perp AB$, $M \in AB$ și $BN \perp CD$, $N \in CD$. Demonstrați că $AM \equiv NC$ și $DMBN$ este dreptunghi.

**13.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AD$, $D \in BC$, este înălțime și $BE$, $E \in AC$, este bisectoare, iar $AD \cap BE = \{O\}$. Punctul $M$ este piciorul perpendicularei duse din punctul $E$ pe latura $BC$. Demonstrați că:
a. $\Delta AEO$ este isoscel; b. $AEMO$ este romb.

**14.** În exeriorul paralelogramului $ABCD$, $\sphericalangle A < 90°$, construim pătratele $ABMN$ și $BCDE$. Demonstrați că $BD \equiv ME$.

**15.** Bisectoarele unghiurilor $A$ și $B$ ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează într-un punct $M$, situat pe latura $DC$.
a. Demonstrați că triunghiul $DAM$ este isoscel.
b. Demonstrați că triunghiul $AMB$ este dreptunghic.
c. Dacă $AD = 8$ cm, calculați perimetrul paralelogramului $ABCD$.

**16.** Bisectoarele unghiurilor unui paralelogram se intersectează, două câte două, în punctele $A$, $B$, $C$ și $D$. Demonstrați că cele patru puncte sunt vârfurile unui dreptunghi.

**17.** În pralelogramul $ABCD$, $AB > AD$, bisectoarea unghiului $A$ intersectează latura $CD$ în punctul $M$, iar bisectoarea unghiului $D$ intersectează latura $AB$ în punctul $N$. Demonstrați că patrulaterul $ADMN$ este romb.

**18.** În exteriorul triunghiului oarecare $ABC$ se construiesc pătratele $ABMN$ și $ACDE$. Punctul $P$ este mijlocul laturii $BC$, iar punctul $Q$ este piciorul perpendicularei din $A$ pe $EN$. Demonstrați că:
a. $BE \equiv CN$; b. $BE \perp CN$; c. punctele $P$, $A$ și $Q$ sunt coliniare.

**19.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, punctele $E$ și $F$ sunt picioarele perpendicularelor construite din $A$, respectiv $B$, pe dreapta $CD$. Demonstrați că mijloacele segmentelor $AE$, $AD$, $BC$ și $BF$ sunt patru puncte coliniare.

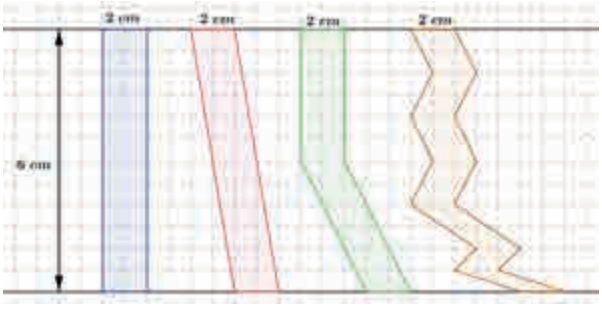
**20.** Punctele $D$, $E$ și $F$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $AC$, respectiv $BC$, ale triunghiului $ABC$. Punctul $M$ este simetricul punctului $C$ față de punctul $D$, iar punctul $N$ este simetricul punctului $F$ față de punctul $E$. Demonstrați că:
a. $MACB$ este pralelogram; b. $AN \equiv BF$; c. punctele $M$, $A$ și $N$ sunt coliniare.

**21.** În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiul dreptunghic isoscel $ABM$, $\sphericalangle M = 90°$ și triunghiul echilateral $DCN$. Demonstrați că punctele $M$, $N$ și $O$ sunt coliniare, unde $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor pătratului.

**22.** Punctele $E$ și $F$ sunt situate pe diagonala $AC$ a paralelogramului $ABCD$, astfel încât $AE = EF = FD$. Punctul $O$ este intersecția diagonalelor paralelogramului, $\{M\} = DE \cap AB$ și $\{N\} = BF \cap DC$. Demonstrați că:
a. $DEBF$ este paralelogram;
b. punctele $M$, $O$ și $N$ sunt coliniare;
c. punctul $M$ este mijlocul segmentului $AB$.

**23.** În pătratul $ABCD$, $AB = 12$ cm, punctul $M$ este situat pe latura $AB$ astfel încât $MB = 2AM$, iar punctul $N$ este mijlocul laturii $CD$. Calculați aria trapezului $AMND$ și aria triunghiului $NMB$.

**24.** Observați desenul alăturat. Folosind informațiile din figură, stabiliți care dintre suprafețele colorate în diverse culori are aria cea mai mică.



## TESTUL 1

Completați cu răspunsul corect.

**1.** Într-un pătrat diagonalele sunt ..... și ..... .
**2.** Patrulaterul cu două laturi paralele și două neparalele se numește ..... .
**3.** Paralelogramul cu un unghi drept poate fi ..... sau ..... .
**4.** Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci el poate fi ..... sau ..... .
**5.** Trapezul în care una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe baze se numește ..... .
**6.** Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale trapezului se numește ..... .
**7.** Dacă un patrulater are două laturi opuse paralele și congruente, atunci el este ..... .
**8.** Dacă un trapez are unghiurile alăturate uneia dintre baze congruente, atunci el este ..... .
**9.** Într-un paralelogram, punctul de intersecție al diagonalelor se află la .... fiecărei diagonale.
**10.** Într-un trapez, lungimea liniei mijlocii este egală cu ..... .
**11.** Drepunghiul în care diagonalele sunt perpendiculare este ..... .
**12.** Într-un trapez isoscel, diagonalele sunt ..... .
**13.** Într-un paralelogram, orice două unghiuri consecutive sunt ..... .
**14.** Într-un triunghi lungimea liniei mijocii este egală cu ..... .
**15.** Dacă un romb are un unghi drept, atunci el este ..... .
**16.** Dacă un patrulater are trei unghiuri cu măsura de 90°, atunci el este ..... .
**17.** Dacă un dreptunghi are două laturi alăturate cu aceeași lungime, atunci el este ..... .
**18.** Dacă un paralelogram are un unghi drept și diagonale perpendiculare, atunci el este ..... .

*Barem: fiecare problemă se punctează cu 0,5p. Oficiu 1p.*

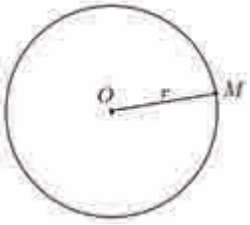
## TESTUL 1

**1.** În triunghiul $ABC$ considerăm un punct oarecare $M$ situat pe latura $BC$. Paralela prin $M$ la $AC$ intersectează latura $AB$ în punctul $P$, iar paralela prin $M$ la $AB$ intersectează latura $AC$ în punctul $N$.
a. Demonstrați că patrulaterul $APMN$ este paralelogram.
b. Demonstrați că $\sphericalangle BPM \equiv \sphericalangle CQM$.
c. Demonstrați că, dacă $AM$ este bisectoarea unghiului $BAC$, atunci $AM \perp PN$.
d. Dacă, în plus, triunghiul $ABC$ este isoscel, $AB = AC = 15$ cm, calculați perimetrul patrulaterului $APMN$.
**2.** În triunghiul oarecare $ABC$, $AM$ este mediană, $M \in BC$, iar punctul $D$ este simetricul punctului $A$ față de punctul $N$. Demonstrați că:
**a.** patrulaterul $ABDC$ este paralelogram;
**b.** $2 \cdot AN < AB + AC$.
**3.** În dreptunghiul $ABCD$, punctul $M$ este mijlocul laturii $AB$, iar punctele $E$ și $F$ sunt mijloacele segmentelor $MC$, respectiv $MD$.
a. Demonstrați că patrulaterul $DFEC$ este trapez isoscel.
b. Demonstrați că patrulaterul $AFEB$ este trapez isoscel.
c. Dacă punctul $N$ este intersecția dreptelor $AF$ și $BE$, demonstrați că $N$ este mijlocul laturii $DC$.

*Barem: 1. 4p. 2. 2p. 3. 3p. Oficiu 1p.*

# COARDE ȘI ARCE ÎN CERC, PROPRIETĂȚI

## NE AMINTIM!




✓ Fiind dat un punct $O$ și un număr pozitiv $r$, se numește *cerc de centru $O$ și rază $r$* mulțimea punctelor din plan (P) situate la distanța $r$ față de $O$.

Notăm: $C(O,r) = \{M \in P \mid OM = r\}$ și citim *„cercul de centru $O$ și rază $r$”*.

Segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului se numește *rază*. Prin *rază* înțelegem și lungimea acestui segment.

✓ Altfel spus: ”*Cercul* este figura geometrică alcătuită din toate punctele din plan care sunt la aceeași distanță față de un punct fix, numit *centru*”.

✓ Două cercuri cu raze egale sunt congruente.




• *interiorul cercului* – $IntC(O,r)$: mulțimea punctelor $M$, din plan, pentru care $OM < r$;

• *exteriorul cercului* – $ExtC(O,r)$: mulțimea punctelor $N$, din plan, pentru care $ON > r$;

• *disc de centru $O$ și rază $r$*: mulțimea $D(O,r) = C(O,r) \cup IntC(O,r)$.

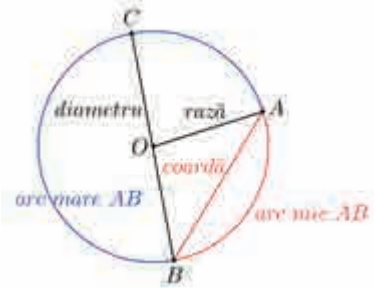
• *coardă*: segment cu capetele pe cerc;




• *diametru*: coardă care conține centrul cercului;

• capetele unui diametru se numesc *puncte diametral opuse*;

• lungimea unui diametru este dublul lungimii razei și reprezintă coarda de cea mai mare lungime a unui cerc. Discutați la nivelul clasei, formulând justificarea afirmației anterioare!




✓ Dacă $A$ și $B$ sunt două puncte distincte de pe cercul $C(O,r)$, care nu sunt diametral opuse, atunci:

• $\sphericalangle AOB$ (unghi cu vârful în centrul cercului) se numește *unghi la centru*;

• *arcul mic $AB$*, notat $\overset{\frown}{AB}$: mulțimea punctelor de pe cerc situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$;

• *arcul mare $AB$,* notat $\overset{\frown}{AB}$ sau $\overset{\frown}{ACB}$ (vedeți desenul): mulțimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\sphericalangle AOB$;

• coarda $AB$ este *corespunzătoare* arcelor determinate de punctele $A$ și $B$, dar și arcul $\overset{\frown}{AB}$ *corespunde* coardei $AB$;

• măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător;

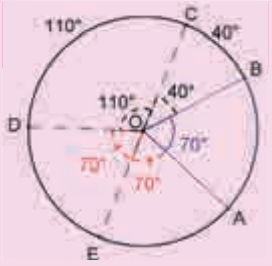
• măsura arcului mare cu capetele în $A$ și $B$ este egală cu diferența dintre măsura cercului, de 360°, și măsura arcului mic $AB$ : $\overset{\frown}{ACB} = 360° - \overset{\frown}{AB}$;

• două arce de cerc de pe același cerc sau de pe cercuri congruente sunt congruente dacă au aceeași măsură: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$;

• dacă $A$ și $B$ sunt diametral opuse, atunci cele două arce de cerc formate se numesc *semicercuri*, iar $\sphericalangle AOB$ este unghi alungit.

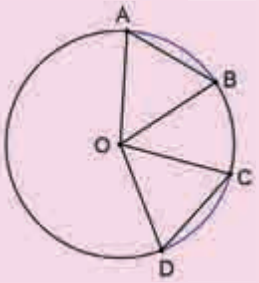
## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

✓ Desenați un cerc cu centrul $O$ și raza de 4 cm, precum și punctele $A$, $B$, $C$, $D$ și $E$ aparținând cercului, astfel încât: $\sphericalangle AOB = 70°$, $\overset{\frown}{BC} = 40°$, $B \in AC$ (arcul mic), $CD = 100°$, $C \in BD$, $DE \equiv EA$, cu E pe arcul mic $AD$. Demonstrați că punctele $C$ și $E$ sunt diametral opuse și faptul că punctul $A$ este mijlocul arcului $\overset{\frown}{BE}$.




*Rezolvare.* $\sphericalangle AOB = 70° \Rightarrow AB = 70°$. Pentru a putea desena punctul $E$, calculăm mai întâi măsura arcului $DA$: $DA = 360° - AB - BC - CD = 140° \Rightarrow DE = EA = 70°$; $\sphericalangle COE = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE = 180°$, deci $\overset{\frown}{CE} = 180°$, iar punctele $C$ și $E$ sunt diametral opuse; $EA = AB = 70°$, deci punctul $A$ este mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{BE}$.

✓ În cercul de centru $O$ și rază $r$ din figura alăturată considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ astfel încât $AB \equiv CD$. Ce puteți spune despre unghiurile $AOB$ și $COD$? Dar despre triunghiurile $AOB$ și $COD$?



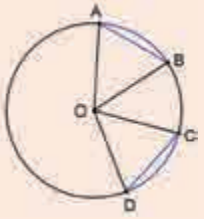

*Rezolvare.*

$AB \equiv CD \Rightarrow AB = CD \Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, deci cele două unghiuri sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{l} OA \equiv OC \\ \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \\ OB \equiv OD \end{array}\right| \xRightarrow{LUL} \Delta AOB \equiv \Delta COD$$

**TEOREMA 1**

Într-un cerc, sau în cercuri congruente, dacă două arce de cerc sunt congruente, atunci coardele corespunzătoare sunt congruente.




*Ipoteză*: $A, B, C, D \in C(O, r)$, $AB \equiv CD$

*Concluzie*: $AB \equiv CD$

*Demonstrație*: $\Delta AOB \equiv \Delta COD \Rightarrow AB \equiv CD$.

**RECIPROCA TEOREMEI 1**

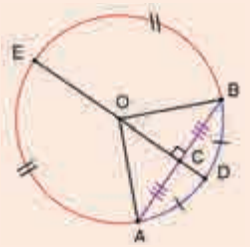
Într-un cerc, sau în cercuri congruente, dacă două coarde sunt congruente, atunci arcele de cerc corespunzătoare sunt congruente.

Demonstrați singuri *Reciproca Teoremei 1*, folosind aceleași triunghiuri, dar cu alt caz de congruență.

Proprietățile triunghiului isoscel determină următoarea proprietate a cercului:

**TEOREMA 2**

Într-un cerc, diametrul perpendicular pe o coardă intersectează coarda și arcele de cerc determinate de coardă în mijloacele acestora.




*Ipoteză*: $A, B \in C(O, r)$, $ED$ diametru, $ED \perp AB$, $ED \cap AB = \{C\}$

*Concluzie*: $AC \equiv CB$, $AD \equiv DB$, $AE \equiv \overset{\frown}{EB}$

*Demonstrație*: $OC$ este înălțime în $\Delta OAB$ isoscel ($OA = OB = r$), deci este și mediană și bisectoare; $OC$ mediană $\Rightarrow AC = CB$;

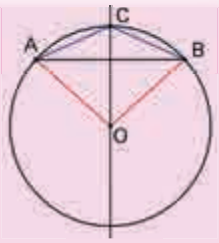
Demonstrați singuri celelalte congruențe.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

✓ Pe cercul de centru $O$ considerăm două puncte distincte, $A$ și $B$ (care să nu fie diametral opuse), precum și punctul $C$, ca fiind mijlocul unuia dintre arcele determinate de punctele $A$ și $B$. Demonstrați că:

a. triunghiul $CAB$ este isoscel;

b. dreapta $OC$ este mediatoarea segmentului $AB$.




*Rezolvare.*

a. $AC \equiv \overset{\frown}{BC}$ și, conform teoremei 1, $AC \equiv BC$, deci triunghiul $CAB$ este isoscel.

b. $CA \equiv CB$ și, conform proprietății punctelor de pe mediatoarea unui segment, punctul $C$ aparține mediatoarei segmentului $AB$; $OA \equiv OB$ (raze ale cercului), deci și punctul $O$ aparține mediatoarei segmentului $AB$. Punctele $O$ și $C$ fiind distincte, obținem că dreapta $OC$ este mediatoarea segmentului $AB$.

Folosind proprietăți ale triunghiurilor și cercului, discutați și argumentați alte strategii de rezolvare a punctului b.

## OBSERVAȚIE

În baza Teoremei 2, mediatoarea unei coarde dintr-un cerc trece prin centrul cercului și prin mijloacele arcelor de cerc (mic și mare) corespunzătoare coardei.

## DESCOPERIȚI

Un patrulater care are diagonalele perpendiculare (așa cum este și pătratul sau rombul) se numește *patrulater ortodiagonal*. Patrulaterul $AOBC$, din problema alăturată, este un patrulater convex ortodiagonal. Stabiliți dacă patrulaterul $AOBC$ poate fi romb! În caz afirmativ, precizați măsura arcului mic$AB$.

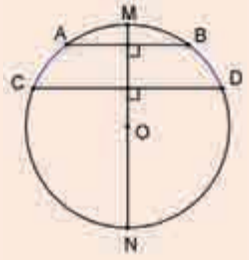
## TEOREMA 3

Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele de cerc cuprinse între ele sunt congruente.

*Ipoteză*: $A, B, C, D \in C(O, r)$, $AB \parallel CD$

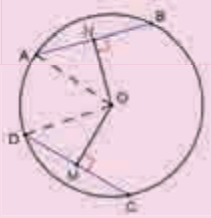
*Concluzie*: $AC \equiv BD$

*Demonstrație*: Construim diametrul perpendicular pe coarde și, conform Teoremei 2, $MC \equiv MD$ și $MA \equiv MB$, și, cum $AC = MC - MA$, respectiv $BD = MD - MB$, se obține concluzia teoremei.




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

✓ Considerăm două coarde congruente, $AB$ și $CD$, într-un cerc de centru $O$, ca în figura alăturată. Construim perpendicularele $ON$ pe $AB$ și $OM$ pe $CD$. Demonstrați că $\Delta OAN \equiv \Delta ODM$.




*Rezolvare.* Conform Teoremei 2, $N$ este mijlocul coardei $AB$, iar $M$ este mijlocul coardei $CD$; cum $AB \equiv CD$, obținem $AN \equiv DM$;

$$\left.\begin{matrix} AN \equiv DM \\ OA \equiv OD \end{matrix}\right| \overset{CI}{\Longrightarrow} \Delta OAN \equiv \Delta ODM$$

## DESCOPERIȚI

Concluzia rămâne adevărată dacă cele două coarde au un punct comun?

Pot avea cele două coarde distincte același mijloc? Argumentați? Dar în cazul în care coardele nu sunt congruente? Explicați!

**TEOREMA 4**

Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci ele sunt egal depărtate de centrul cercului.

*Ipoteză*: $A, B, C, D \in C(O, r)$, $AB \equiv CD$

*Concluzie*: $d(O, AB) = d(O, CD)$

*Demonstrație*: $\Delta OAN \equiv \Delta ODM \Rightarrow ON \equiv OM$, deci $d(O, AB) = d(O, CD)$.

**RECIPROCA TEOREMEI 4**

Dacă două coarde ale unui cerc sunt egal depărtate de centrul cercului, atunci coardele sunt congruente.

Demonstrați singuri *Reciproca Teoremei 4*, folosind aceleași triunghiuri, dar cu alt caz de congruență.

## EXERSAȚI

**1.** Punctele distincte $A$, $B$ și $C$ aparțin unui cerc, astfel încât $AB \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv CA$. Ce fel de triunghi este $ABC$?

**2.** Punctele distincte $A$, $B$, $C$ și $D$ aparțin unui cerc astfel încât $AB \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv CD \equiv DA$. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

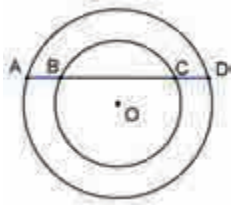
**3.** Considerăm $AB$ și $CD$ două coarde ale unui cerc de centru $O$. Știind că $d(O, AB) = d(O, CD)$, demonstrați că $AB \equiv CD$.

**4.** Punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ aparțin unui cerc de centru $O$, astfel încât $AB$ este diametru, $\sphericalangle ABC = 70°$ și coardele $AD$ și $BC$ sunt congruente.

a. Calculați măsura unghiului $BOC$ și a arcului $AD$.

b. Există o așezare pe cerc a punctelor astfel încât $CD$ să fie semicerc? Explicați.

**5.** În figura alăturată cele două cercuri sunt concentrice, iar punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ sunt coliniare. Demonstrați că $AB \equiv CD$.




**6.** Punctele $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ și $F$ sunt situate pe un cerc de centru $O$ astfel încât $AB \equiv CD$ și coardele $AB$ și $EF$ se află la aceeași distanță față de punctul $O$. Demonstrați că $AB \equiv CD \equiv EF$.

**7.** Într-un cerc de centru $O$ construim două diametre oarecare $AB$ și $CD$.

a. Demonstrați că $AC \equiv BD$ și $d(O, AD) = d(O, BC)$.

b. Există o poziție particulară a celor două diametre pentru care lungimea coardei $AD$ este egală cu lungimea razei cercului? Explicați.

c. Demonstrați că patrulaterul $ACDB$ este dreptunghi. Poate fi el romb? Dar pătrat? Dar trapez? Explicați.

**8.** Considerăm un cerc de centru $O$ și diametru $AB$. Punctele $D$ și $E$ aparțin unuia dintre semicercurile determinate de diametrul $AB$ astfel încât $AD \equiv DE \equiv \overset{\frown}{EB}$.

a. Calculați măsura arcului $DE$ și măsura unghiului $AOD$.

b. Demonstrați că triunghiul $ODE$ este echilateral.

c. Demonstrați că distanțele de la punctul $O$ la coardele $AD$ și $BE$ sunt egale.

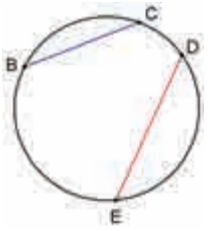
d. Demonstrați că $ABED$ este trapez isoscel și calculați perimetrul lui, știind că raza cercului este 5 cm.

**9.** Punctul $A$ este situat în interiorul unui cerc de centru $O$. Desenați o coardă în cerc al cărei mijloc să fie punctul $A$.

Explicați etapele de construcție făcute și formulați la nivelul clasei concluzii care sprijină învățarea.

## EXERSAȚI

**10.** În cercul din figura alăturată nu este marcată poziția centrului. Explicați cum putem determina centrul cercului, folosind cele două coarde desenate. Reluați rezolvarea problemei în cazul în care cele două coarde desenate sunt paralele.




**11.** Într-un cerc cu centrul în punctul $O$, $AB$ este un diametru, iar $CD$ este o coardă astfel încât $CD \perp AB$.
a. Demonstrați că triunghiul $ACD$ este isoscel.
b. Demonstrați că $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{BD}$.
c. Stabiliți dacă există o poziție a coardei $CD$ astfel încât patrulaterul $ACBD$ să fie pătrat.

**12.** Segmentele $AB$ și $CD$ sunt diametre în $C(O, 6\text{ cm})$, iar $d(O, AC) = 3$ cm.
a. Determinați $d(O, BD)$.
b. Calculați lungimea coardei $AD$.
c. Demonstrați că distanța de la $O$ la $AD$ este egală cu jumătate din lungimea coardei $AC$.

**13.** Coardele $AB$ și $CD$ ale unui cerc cu centrul în $O$ sunt paralele. Știind că $\sphericalangle AOB = 100°$ și $\sphericalangle BOC = 55°$, calculați:
a. măsura arcului $AD$;
b. măsura unghiului $COD$.

**14.** Segmentul $MN$ este un diametru în cercul de centru $O$, iar $AB$ și $CD$ sunt două coarde perpendiculare pe acesta, cu $A$ și $D$ de aceeași parte a dreptei $MN$.
a. Demonstrați că $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{AD}$ și $d(O, AD) = d(O, BC)$.
b. Dacă, în plus, punctele $B$, $O$ și $D$ sunt coliniare, demonstrați că și punctele $A$, $O$ și $C$ sunt coliniare și $AB \equiv CD$.

## DESCOPERĂ

În contextul problemei 14. pe care tocmai ați rezolvat-o, pornind de la desenarea mai multor cazuri, studiați și argumentați ce fel de patrulater determină punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, dacă $AB$ și $CD$ sunt două coarde paralele ale unui cerc.

# UNGHI ÎNSCRIS ÎN CERC

**DEFINIȚIE**

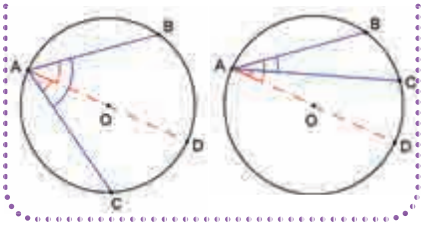
Un unghi cu vârful pe cerc, ale cărui laturi includ două coarde ale cercului, se numește *unghi înscris în cerc*.

## DESCOPERIȚI

✓ Pentru simplificarea exprimării, vom spune că laturile unghiurilor înscrise în cerc sunt coarde sau diametre atunci când, în realitate, laturile conțin coarde, respectiv diametru.

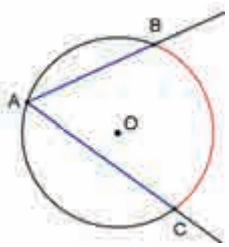
✓ În problema alăturată se stabilește o relație între măsura unghiului înscris în cerc și măsura arcului cuprins între laturile lui, în cazul în care una dintre laturile unghiului este diametru al cercului.

Studiați desenele următoare și colaborați la nivelul clasei pentru a demonstra că relația este adevărată și atunci când laturile sunt coarde (dar nu diametru).



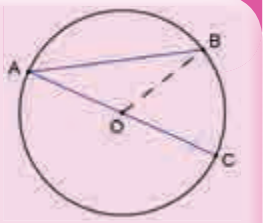

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Unghiul $BAC$ din figura alăturată este un unghi înscris în cerc. Arcul $BC$ (colorat pe desen) este *cuprins* între laturile unghiului. Mai spunem și că unghiul $BAC$ *corespunde* arcului $BC$.




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Refaceți pe caiete desenul alăturat, corespunzător cercului de centru $O$ și rază 4 cm, precum și unghiul $BAC$, înscris în cerc, astfel încât $AC$ să fie diametru al cercului. Exprimați măsura unghiului $BOC$ în funcție de măsura unghiului $BAC$. Ce relație între măsura unghiului $BAC$ și măsura arcului $BC$ se poate deduce?




*Rezolvare.* Triunghiul $OAB$ este isoscel, $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$, iar unghiul $BOC$ este unghi exterior triunghiului, deci $\sphericalangle BOC = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 2 \cdot \sphericalangle OAB$; cum măsura $\sphericalangle BOC$ este egală cu măsura $\overset{\frown}{BC}$, obținem că $\sphericalangle BAC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ (măsura unghiului este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale).

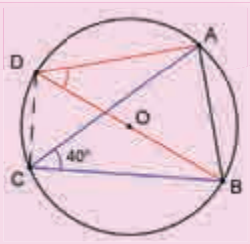
**TEOREMĂ**

Măsura unghiului înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Pe $C(O, r)$ considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ (vezi figura alăturată), astfel încât $BD$ este diametru și $\sphericalangle ACB = 40°$.

Calculați: măsura arcului $AB$ cuprins între laturile unghiului $ACB$, măsura unghiului $ADB$ și măsura unghiului $BAD$.




*Rezolvare.* $AB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 80°$; $\sphericalangle ADB = AB : 2 = 40°$; $\overset{\frown}{BCD}$ este un semicerc, deci $\sphericalangle BAD = 180° : 2 = 90°$.

## IMPORTANT

✓ Un unghi înscris într-un cerc care corespunde unui semicerc este unghi drept.

✓ Două unghiuri înscrise într-un cerc care corespund aceluiași arc de cerc sunt congruente.

## NE AMINTIM!

În clasa a VI-a ați învățat că orice triunghi se poate înscrie într-un cerc (vârfurile triunghiului sunt puncte ale cercului). În acest caz, despre cerc spunem că se numește *cercul circumscris triunghiului*, iar centrul lui este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului.

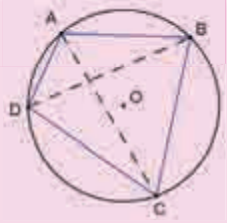
Desenați un triunghi înscris într-un cerc și, folosind teorema unghiului înscris în cerc, demonstrați proprietatea: *Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.*

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Pe $C(O, r)$ considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ (vezi figura alăturată) care determină patrulaterul $ABCD$. Demonstrați că:

a. $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$;

b. $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$.




*Rezolvare.* $\sphericalangle BAD = \overset{\frown}{BCD} : 2$ și $\sphericalangle BCD = \overset{\frown}{BAD} : 2$, deci $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 360° : 2 = 180°$.

Unghiurile $BAC$ și $BDC$ au același arc de cerc cuprins între laturile lor, deci sunt congruente pentru că amândouă au măsura jumătate din măsura aceluiași arc de cerc.

## DESCOPERIȚI

Nu toate patrulaterele se pot înscrie într-un cerc. Discutați la nivelul clasei care dintre patrulaterele particulare studiate se pot înscrie într-un cerc. Pentru fiecare dintre ele precizați poziția centrului cercului circumscris. Formulați într-un tabel concluziile!

## IMPORTANT

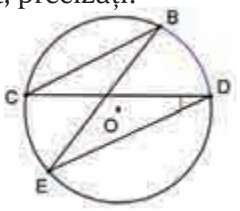
✓ Un patrulater cu vârfurile pe un cerc se numește patrulater *înscris în cerc*. În aceste caz spunem că cercul este *circumscris patrulaterului*.

✓ Într-un patrulater înscris într-un cerc unghiurile opuse sunt suplementare.

✓ Într-un patrulater înscris într-un cerc unghiurile, în pereche, formate de diagonale cu două laturi opuse, sunt congruente. Observați desenul anterior și scrieți perechile de unghiuri congruente!

## EXERSAȚI

**1.** Referitor la desenul alăturat, precizați:
a. un unghi înscris în cerc, corespunzător arcului mic $BD$;
b. arcul de cerc corespunzător unghiului $CDE$;
c. două unghiuri congruente.




**2.** Unghiul $ABC$ este înscris într-un cerc de centru $O$. Bisectoarea unghiului intersectează cercul a doua oară în punctul $M$. Demonstrați că $AM \equiv CM$ (coarde congruente).

**3.** Considerăm un cerc de centru $O$ și punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ situate pe acesta, astfel încât $AB = 140°$. Calculați măsurile unghiurilor $ACB$ și $ADB$ în fiecare dintre situațiile:
a. Punctele $C$ și $D$ sunt de aceeași parte a dreptei $AB$.
b. Punctele $C$ și $D$ sunt de o parte și de alta a dreptei $AB$.

**4.** Triunghiul $ABC$ este înscris într-un cerc de centru $O$. Știind că $\sphericalangle BAC = 80°$ și $AC = 80°$, calculați măsurile $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{AOC}$.

**5.** Într-un cerc de centru $O$ considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, în această ordine, notate în sensul mersului acelor de ceasornic, astfel încât $AB = 70°$, $\overset{\frown}{BC} = 40°$ și $CD = 160°$.
a. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.
b. Determinați două unghiuri cu măsura de 80°.

**6.** Triunghiul $ABC$ este înscris în cercul de centru $O$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că măsura arcului mic $AC$ este dublă măsurii arcului mic $\overset{\frown}{BC}$, iar măsura arcului mic $AB$ este cu 40° mai mică decât măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$.

**7.** Triunghiul $ABC$ este ascuțitunghic și este înscris într-un cerc de centru $O$, iar punctul $D$ este diametral opus punctului $B$.
a. Justificați faptul că punctul $D$ aparține arcului mic $AC$.
b. Dacă $\sphericalangle B = 65°$, calculați măsura unghiului $ADC$.

**8.** Într-un cerc de centru $O$, $AB$ este un diametru, iar punctul $C$ este mijlocul unuia dintre semicercurile determinate de punctele $A$ și $B$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

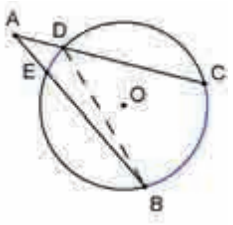
**9.** În cercul de centru $O$ considerăm diametrele $AB$ și $CD$ astfel încât $\sphericalangle ABD = 40°$. Calculați măsurile arcelor de cerc mici $AD$, $\overset{\frown}{BC}$, $DB$ și $AC$.

**10.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 50°$ și $\sphericalangle B = 70°$. Bisectoarele unghiurilor $B$ și $C$ intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele $M$, respectiv $N$. Calculați măsurile: $MB$, $\overset{\frown}{MAN}$, $\overset{\frown}{BCN}$ și $\sphericalangle MBA$.

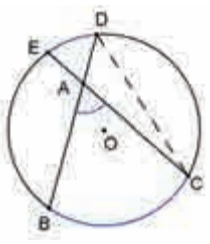
**11.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle B = 55°$ și $\sphericalangle C = 65°$. Înălțimea unghiului $A$ intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul $M$. Calculați măsurile: $MB$, $MC$ și $\overset{\frown}{MBA}$.

**12.** Patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc de centru $O$. Notăm cu $M$, $N$, $P$ și $Q$ mijloacele arcelor mici $AB$, $\overset{\frown}{BC}$, $CD$, respectiv $DA$. Demonstrați că dreptele $MP$ și $NQ$ sunt perpendiculare.

**13.** În figura alăturată se observă un unghi, $BAC$, cu vârful în exteriorul unui cerc, ale cărui laturi conțin două coarde ale cercului. Folosind faptul că unghiul $BDC$ este unghi exterior triunghiului $ADB$, demonstrați că $\sphericalangle BAC = (\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}) : 2$.



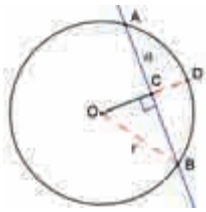

**14.** Unghiul $BAC$ din figura alăturată are vârful situat în interiorul cercului. Găsiți o relație între măsura unghiului $BAC$ și măsurile arcelor de cerc $BC$ și $DE$ colorate pe desen.



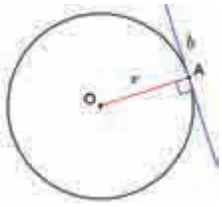
# TANGENTE DINTR-UN PUNCT EXTERIOR LA UN CERC

## NE AMINTIM!

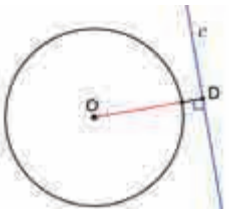
Considerăm un cerc $C(O,r)$ și dreptele $a$, $b$ și $c$ :



✓ Spunem că dreapta $a$ se numește *secantă a cercului* dacă intersectează cercul în două puncte distincte. Dreapta $a$ este *secantă cercului* dacă $d(O,a) < r$.



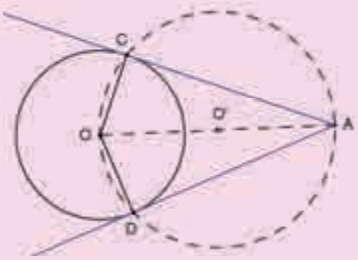
✓ Spunem că dreapta $b$ se numește *tangentă cercului* dacă dreapta și cercul au un singur punct comun, numit punct de tangență. Dreapta $b$ este *tangentă cercului* dacă $d(O,b) = r$. Tangenta la un cerc este perpendiculară pe raza cercului construită în punctul de tangență ($OA \perp b$, unde $A$ este punctul de tangență).



Folosindu-vă de proprietatea distanței de la un punct la dreaptă, argumentați că $A$ este singurul punct comun al dreptei cu cercul. Formulați apoi o reciprocă!

✓ Spunem că dreapta $c$ se numește *exterioară cercului* dacă dreapta și cercul nu au niciun punct comun. Dreapta $c$ este *exterioară cercului* dacă $d(O,c) > r$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ



Considerăm cercul $C(O,r)$ și punctul $A$, exterior acestuia. Construim cercul de diametru $OA$, care intersectează cercul inițial în punctele $C$ și $D$. Unghiul $OCA$ corespunde, în al doilea cerc, arcului $\overset{\frown}{ODA}$, care este un semicerc, deci $\sphericalangle OCA = 90°$. Cu alte cuvinte, $OC \perp AC$, deci dreapta $AC$ este o tangentă la $C(O,r)$ și, urmând același raționament, și dreapta $AD$ este tangentă la $C(O,r)$.

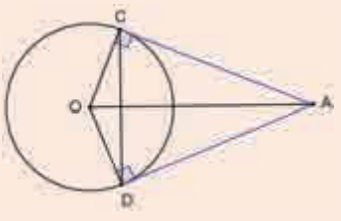
**PROPRIETATE**

Dintr-un punct exterior unui cerc se pot construi două tangente la acel cerc.

**TEOREMA**

Fie $A$ un punct exterior unui cerc $C(O,r)$ și $AC$ și $AD$ tangentele duse din punctul $A$ la cerc. Atunci:

a. $AC \equiv AD$ (segmentele $AC$ și $AD$ sunt congruente);
b. semidreapta ($OA$ este bisectoarea unghiului $COD$;
c. semidreapta ($AO$ este bisectoarea unghiului $CAD$;
d. dreapta $OA$ este mediatoarea segmentului CD.



## DESCOPERIȚI

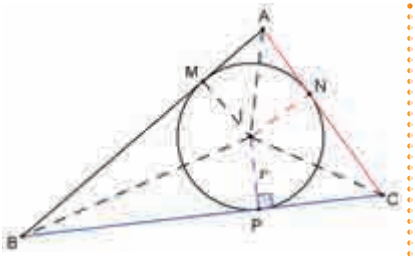
Folosind congruența triunghiurilor dreptunghice și proprietăți ale cercului studiate, discutați și argumentați o strategie de demonstrație a teoremei. Ce legătură este între teoremă și *proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi* (studiată în clasa a VI-a)?

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Desenați un cerc de rază 2 cm și un patrulater cu toate laturile tangente la cerc (circumscris cercului). Comparați desenele între voi. Formulați concluzii privind tipul patrulaterului. Poate fi paralelogram? Dar dreptunghi? Dar romb? Dar pătrat? Dar trapez? Măsurați fiecare, cu rigla gradată, laturile și calculați perimetrul patrulaterului desenat. Comparați valorile obținute. Formulați o ipoteză privind tipul patrulaterului cu perimetrul de lungime minimă. Discutați posibile strategii de validare a ipotezei!



## NE AMINTIM!




În clasa a VI-a ați învățat că în orice triunghi se poate înscrie un cerc (laturile triunghiului sunt tangente cercului). În acest caz, despre cerc spunem că se numește *cerc înscris în triunghi*, iar centrul lui, notat de regulă *I*, este punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

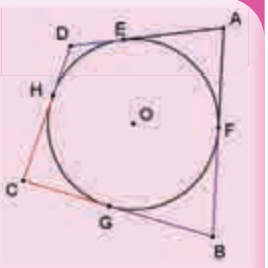
Referitor la imaginea alăturată, exprimați aria triunghiului în funcție de ariile triunghiurilor *IAB*, *IAC* și *IBC* și argumentați modul în care se obține formula $A_{\Delta ABC} = p \cdot r$, unde $p$ este semiperimetrul triunghiului, iar $r$ este raza cercului înscris.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Laturile patrulaterului *ABCD* sunt tangente la un cerc. Demonstrați că $AB + CD = BC + AD$.

*Rezolvare.*

$AE = AF$, $BF = BG$, $CG = CH$ și $DE = DH$, conform teoremei tangentelor la cerc; $AB + CD = (AF + FB) + (CH + HD)$, iar $BC + AD = (BG + GC) + (AE + ED)$ și, ținând cont de egalitățile anterioare, se obține concluzia.




## EXERSAȚI

**1.** Considerăm unghiul *BAC* cu măsura de 60°.
a. Câte cercuri tangente la laturile unghiului se pot desena? Unde se află centrele lor?
b. Explicați modul în care desenați cercul cu raza de lungime 4 cm, tangent la laturile unghiului.

**2.** Laturile *AB*, *BC* și *AC* ale triunghiului *ABC* sunt tangente la un cerc în punctele *M*, *N* respectiv *P*.
a. Dacă $AM = 7$ cm, $BN = 5$ cm și $CP = 8$ cm, calculați perimetrul triunghiului.

## EXERSAȚI

b. Dacă $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm și $AC = 14$ cm, calculați lungimile segmentelor $BM$, $CN$ și $AP$.
c. Dacă perimetrul triunghiului este egal cu 34 cm, iar $BC = 11$ cm, calculați lungimile tangentelor din punctul $A$ la cerc.

**3.** Considerăm triunghiul $ABC$ și cercul de centru $I$ înscris în triunghi. Punctul $M$ este punctul de tangență al laturii $BC$ cu cercul. Demonstrați că, dacă punctele $A$, $I$ și $M$ sunt coliniare, atunci triunghiul $ABC$ este isoscel.

**4.** Punctele $M$, $N$ și $P$ sunt punctele de intersecție ale laturilor $AB$, $BC$, respectiv $AC$, ale triunghiului $ABC$ cu cercul înscris în triunghi. Demonstrați că, dacă $N$ este mijlocul laturii $BC$, atunci triunghiul $ABC$ este isoscel.

**5.** Triunghiul echilateral $ABC$ este înscris în cercul de centru $O$. Tangentele la cerc în punctele $A$ și $C$ se intersectează în punctul $D$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este romb.

**6.** Pe cercul de centru $O$ considerăm punctele $A$ și $B$, astfel încât $\sphericalangle AOB = 100°$. Calculați măsura unghiului ascuțit dintre tangenta la cerc în punctul $A$ și coarda $AB$.

**7.** În cercul de centru $O$ considerăm coarda $AB$ și tangenta la cerc $AM$. Demonstrați că măsura unghiului $MAB$ este egală cu jumătate din măsura arcului $AB$, cuprins între laturile unghiului.

**8.** Fie cercul $C(O, r)$ și punctele $A$ și $B$ aparținând acestuia, astfel încât $\sphericalangle AOB = 90°$. Tangentele la cerc în punctele $A$ și $B$ se intersectează în punctul $C$. Demonstrați că patrulaterul $OACB$ este pătrat.

**9.** Pe cercul $C(O, r)$ considerăm punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât $AB$ este diametru. Construim dreptele $a$, $b$ și $c$, tangente la cerc în punctele $A$, $B$ și respectiv $C$, și fie $a \cap c = \{M\}$ și $b \cap c = \{N\}$.
a. Demonstrați că $a \parallel b$.
b. Stabiliți ce fel de patrulater particular este patrulaterul $AMNB$. Analizați toate cazurile posibile.
c. Demonstrați că măsura unghiului $MON$ este egală cu 90°.

## DESCOPERIȚI



**TEOREMA CIOCULUI DE PASĂRE**

Observați desenul alăturat și căutați similitudini cu teorema studiată în cadrul lecției anterioare. Se justifică denumirea „teorema ciocului de pasăre”, cu care este întâlnită uneori?

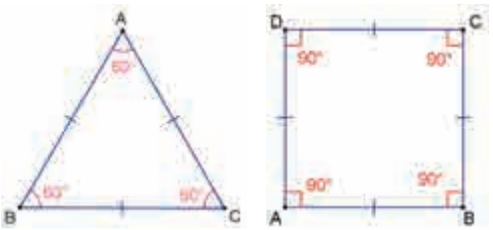


# POLIGOANE REGULATE ÎNSCRISE ÎNTR-UN CERC

## DESCOPERIȚI

În raport cu explicația privind etimologia cuvântului **poligon** (gr.: *polys* = *multe* și *gonos* = *unghi*), dați exemple de situații reale în care se utilizează. Discutați și explicați sensul utilizării acestuia în situațiile pe care le-ați identificat. Vă încurajăm să folosiți și internetul pentru această sarcină de lucru!

## NE AMINTIM!




Până acum ați studiat proprietățile a două tipuri de poligoane, triunghiul – poligonul cu trei laturi și patrulaterul – poligonul cu patru laturi. Dintre acestea, triunghiul echilateral și pătratul au două proprietăți comune, care le diferențiază de celelalte tipuri de poligoane: fiecare are laturile, respectiv unghiurile congruente.

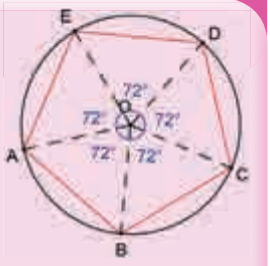
**DEFINIȚIE** Un poligon convex care are toate laturile și, respectiv, toate unghiurile congruente se numește *poligon regulat*.

## ȘTIAȚI CĂ...?

Exceptând triunghiul și pătratul, numele celorlalte poligoane se formează folosind denumirea în latină a numerelor, urmate de sufixul **gon** (*latură* în greaca veche): pentag**on** (poligon cu cinci laturi), hexag**on** (poligon cu șase laturi), heptag**on** (poligon cu șapte laturi) ...

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Desenați un cerc de centru $O$ și rază 3 cm și 5 unghiuri în jurul unui punct, congruente, toate cu vârful în centrul cercului.




Folosind proprietăți ale cercului, demonstrați că laturile pentagonului $ABCDE$ sunt congruente. Calculați măsurile unghiurilor pentagonului și justificați faptul că $ABCDE$ este un pentagon regulat. Precizați ce informație din enunțul inițial nu a fost folosită. Discutați la nivelul clasei și formulați o concluzie cu aspect de generalizare!

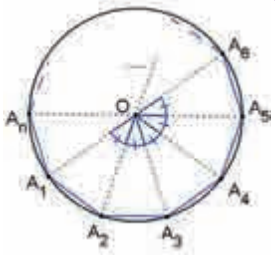


## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Împărțind un cerc în $n$ arce de cerc congruente ($n \geq 3$) și construind coardele corespunzătoare acestora, obținem un poligon regulat (cu $n$ laturi). Centrul cercului circumscris poligonului regulat se numește *centrul poligonului regulat*.



## DESCOPERIȚI




Observați figura alăturată și colaborați la nivelul clasei pentru a formula răspunsuri la următoarele întrebări sau cerințe:

✓ Ce procedeu se poate folosi pentru a împărți cercul în arce congruente?

✓ Care este măsura unui arc de cerc dintre cele $n$, dacă $n = 6$? Dar dacă $n = 10$? Dar dacă $n = 30$? Formulați o concluzie privind cazul general.

✓ Care este măsura unui unghi al poligonului cu 6 laturi? Dar cu 10 laturi? Dar cu 30 de laturi? Formulați o concluzie privind cazul general.

✓ Explicați de ce arcul de 7° nu poate corespunde unei laturi a unui poligon regulat. Dați și alte exemple și formulați concluzii care sprijină învățarea!

✓ Afirmația următoare este adevărată: *Orice poligon regulat este convex* (conform definiției). Există poligoane care să aibă toate unghiurile egale și toate laturile egale, dar care să fie concave? Discutați la nivelul clasei și formulați argumente. Formulați concluzia corectă.

## PROPRIETĂȚI

❖ Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.

❖ Măsura unghiului unui poligon regulat cu $n$ laturi ($n \geq 3$) este egală cu $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

❖ Suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu $n$ laturi ($n \geq 3$) este egală cu $(n-2)\cdot 180^\circ$.

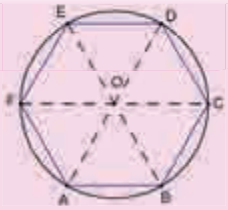
## ✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!

Orice poligon regulat este *inscriptibil* (se poate înscrie într-un cerc). Cercul în care este înscris poligonul este *cercul circumscris* poligonului.

Există o diferență de sens între cuvintele pereche *înscris–inscriptibil*, respectiv *circumscris–circumscriptibil*. Consultați profesorul de limba română pentru a înțelege corect sensul gramatical!

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Hexagonul regulat $ABCDEF$ este înscris într-un cerc de centru $O$ și rază $R$.




a. Calculați măsurile unghiurilor hexagonului.

b. Demonstrați că lungimea laturii hexagonului este egală cu lungimea razei cercului.

*Rezolvare*: a. Măsura unui unghi este egală cu $\frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$;

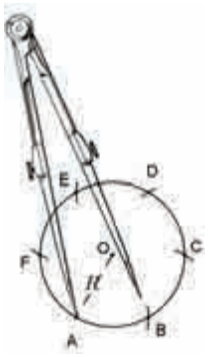
b. Triunghiul $OAB$ este isoscel, iar măsura unghiului $AOB$ este egală cu 60°, așadar triunghiul este echilateral și deci $AB = OA = R$.

## DESCOPERIȚI

Priviți la desenul hexagonului regulat. Centrul hexagonului este și centrul său de simetrie. Discutați între voi și stabiliți valoarea de adevăr a afirmației:

*Orice poligon regulat admite centru de simetrie.*

## APLICAȚIE PRACTICĂ




*Construcția hexagonului regulat înscris într-un cerc de rază cunoscută:*

Proprietatea particulară a hexagonului regulat, demonstrată în aplicația anterioară, respectiv egalitatea lungimii laturii cu raza cercului, sugerează următoarea metodă de construcție a unui hexagon regulat înscris într-un cerc dat:

✓ construim cercul și marcăm un punct $A$ pe acesta;

✓ păstrând deschiderea compasului egală cu raza cercului și poziționând vârful compasului în punctul $A$, marcăm punctul $B$ pe cerc;

✓ mutăm vârful compasului în $B$ și repetăm procedeul până obținem punctul $F$;

✓ poligonul $ABCDEF$ este hexagon regulat.

## DESCOPERIȚI

Discutați la nivelul clasei și argumentați:

a) Cum putem folosi trei dintre punctele desenate în aplicația anterioară, pentru a construi un triunghi echilateral înscris în cercul dat?

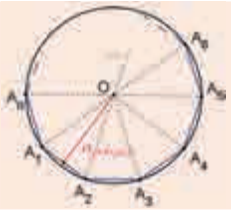
b) Cum, folosind rigla negradată și compasul, putem construi hexagonul regulat prin doar 2 poziționări ale vârfului compasului pe cerc?

c) În clasa a VI-a ați învățat să construiți mediatoarea unui segment, cu rigla negradată și compasul. Explicați cum se poate construi, cu rigla negradată și compasul, un pătrat înscris într-un cerc dat.

DEFINIȚIE

Se numește *apotemă a unui poligon regulat* segmentul ce unește centrul poligonului cu mijlocul unei laturi.

Lungimea apotemei reprezintă *distanța de la centrul poligonului la o latură a acestuia.*




## EXERSAȚI

**1.** Dați exemplu de:

a. patrulater cu laturi congruente, dar care nu este poligon regulat;

b. patrulater cu unghiuri congruente, dar care nu este poligon regulat.

**2.** Desenați un segment $AB$ și două cercuri cu centrele în punctele $A$ și $B$, cu lungimea razei fiecărui cerc egală cu lungimea segmentului $AB$. Dacă notăm cu $C$ unul dintre punctele de intersecție ale cercurilor, demonstrați că $ABC$ este un poligon regulat.

**3.** Determinați măsurile unghiurilor unui poligon regulat cu:

a. 5 laturi; b. 8 laturi; c. 12 laturi; d. 15 laturi.

**4.** Determinați numărul de laturi ale unui poligon regulat, știind că măsura unui unghi al acestuia este egală cu:

a. 140°; b. 157°30'; c. 165°; d. 168°.

## EXERSAȚI

**5.** Desenați cu rigla negradată și compasul un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat înscrise într-un cerc cu raza de 4 cm și evidențiați apotemele acestora. Realizați câte un desen pentru fiecare poligon.

**6.** Discutați la nivelul clasei strategia de rezolvare a următoarei probleme: perimetrul unui poligon regulat este egal cu 80 cm, iar apotema acestuia este 10 cm. Calculați aria poligonului. Comparați ideile pe care le aveți, formulați concluziile potrivite și formulați o problemă similară.

**7.** Demonstrați că în orice poligon regulat se poate înscrie un cerc. Unde este centrul său? Cine este raza cercului înscris? Formulați concluziile sub forma unor enunțuri care să întărească învățarea.

**8.** Desenați un cerc de centru $O$ și rază $R = 4$ cm și hexagonul regulat $ABCDEF$ înscris în cerc. Demonstrați că:
a. patrulaterul $ABCO$ este romb;
b. patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel;
c. $AC \perp CD$;
d. patrulaterul $ABDE$ este dreptunghi.

## ACTIVITATE PRACTICĂ



În figura alăturată se observă un capac de borcan cu ajutorul căruia am desenat conturul unui cerc pe o coală de hârtie. În cercul desenat am înscris un triunghi dreptunghic, pornind de la vârful corespunzător unghiului drept, ca punct de pe cerc, apoi, construind din acel punct o coardă ca primă catetă și o a doua coardă perpendiculară pe prima; am putut astfel măsura diametrul cercului (justificați!). Am măsurat conturul capacului (*lungimea cercului*) cu ajutorul unui metru de croitorie și am realizat împărțirea dintre lungimea conturului și lungimea diametrului.

Pentru ora următoare, realizați acasă acest experiment pentru corpuri care permit desenarea unor cercuri de diferite raze și completați tabelul pentru fiecare măsurătoare:

| Lungime contur circular | Lungime diametru cerc desenat | Rezultatul împărțirii cu 2 zecimale dintre lungimea conturului și lungimea diametrului |
|---|---|---|
| 27,1 cm | 8,6 cm | 3,15 (pentru desenul alăturat) |
| ... | ... | ? |

## ȘTIAȚI CĂ...?



Un exemplu al „perfecțiunii naturii” este fagurele de miere, produs de albine, care este format din hexagoane regulate:



# LUNGIMEA CERCULUI ȘI ARIA DISCULUI

Folosind tabelul obținut acasă în urma realizării aplicației practice de la finalul lecției anterioare, comparați între voi rezultatele notate pe ultima coloană. Comparați aceleași rezultate cu numărul 3,14.

Dacă măsurătorile și calculele voastre au fost realizate cu acuratețe (acceptând faptul că orice măsurătoare este aproximativă, depinzând de procedee și de instrumente), ați găsit faptul că *raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul cercului este aproximativ același pentru toate cercurile*. Acest raport constant se notează cu π (citim *pi*), are valoarea aproximativă egală cu 3,14159... și este un număr irațional.

### ȘTIAȚI CĂ...?

Litera grecească π a fost utilizată, pornindu-se de la cuvântul grecesc „περίμετρος”, *perimetros* (în română: *perimetru*), mai întâi de William Jones în 1707, după care notația a fost popularizată de Leonhard Euler în 1737.

### SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ *Formula lungimii și a ariei cercului*

Lungimea unui cerc de rază $r$ este egală cu produsul dintre dublul lungimii razei și constanta π: $L_{cerc} = 2\pi r$.

Aria unui disc de rază $r$ este dată de formula: $A_{disc} = \pi r^2$.

❖ Ținând cont de modul în care se definește constanta π, notând cu $L$ lungimea unui cerc de rază $r$, obținem $\pi = \frac{L}{2r}$, echivalent cu $L = 2\pi r$.

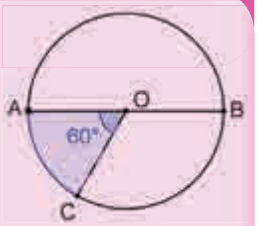
### EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Desenați un cerc de centru $O$ și rază $r = 6$ cm, precum și punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât $AB$ este diametru și $\measuredangle AOC = 60°$. Calculați:

a. lungimea cercului, lungimea semicercului $AB$, precum și lungimea arcului de cerc mic $AC$, exprimând rezultatele cu ajutorul constantei π;

b. aria discului de centru $O$ și rază $r$, precum și aria suprafeței delimitate de razele $OA$ și $OC$ și de arcul mic $AC$ (*sector de cerc* – zona colorată), exprimând rezultatele cu ajutorul constantei π.

c. Aproximați lungimea cercului și aria discului, la zecimi, prin adaos.




*Rezolvare.*

a. $L_{cerc} = 2 \cdot \pi \cdot 6 = 12\pi$ cm; lungimea unui semicerc este jumătate din lungimea cercului $L_{\overset{\frown}{AB}} = 6\pi$ cm.

Pentru a calcula lungimea arcului de cerc mic $\overset{\frown}{AC}$ aplicăm o regulă de trei simplă:

$360° \ldots\ldots\ldots\ldots 12\pi$

$60° \ldots\ldots\ldots\ldots L_{\overset{\frown}{AC}}$

și obținem $L_{\overset{\frown}{AC}} = 2\pi$ cm.

b. $A = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ cm$^2$, iar pentru aria sectorului de cerc corespunzător arcului mic $AC$ aplicăm din nou regula de trei simplă:

$360° \ldots\ldots\ldots\ldots 36\pi$

$60° \ldots\ldots\ldots\ldots A_{sector}$

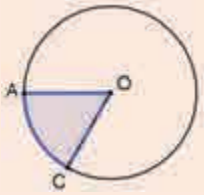
și obținem $A_{sector} = 6\pi$ cm$^2$.

c. Folosind aproximarea la trei zecimale $\pi \simeq 3,141$, obținem $L_{cerc} \simeq 37,7$ cm și $A_{disc} \simeq 113,1$ cm$^2$.

**DEFINIȚIE**

Se numește *sector de cerc*, mulțimea punctelor situate în interiorul unui cerc, delimitată de două raze și de arcul de cerc determinat de cele două raze.

Referitor la desenul alăturat, spunem că sectorul de cerc corespunde unghiului la centru *AOC*, sau arcului de cerc *AC*.




Discutați la nivelul clasei și deduceți o formulă pentru calculul lungimii unui arc de cerc, precum și pentru calculul ariei unui sector de cerc, atunci când cunoaștem măsura arcului și lungimea razei cercului.

## EXERSAȚI

**1.** Calculați, exprimând rezultatele cu ajutorul constantei $\pi$, lungimea și aria unui cerc cu raza de:
a. 5 cm; b. 8 cm; c. 2,5 dm.

**2.** Calculați cu aproximație la zecimi (folosind $\pi \simeq 3,14$) lungimea și aria unui cerc cu raza de:
a. 4 cm; b. 7 cm; c. 3,5 dm.

**3.** Aflați raza unui cerc, știind că lungimea sa este egală cu:
a. $18\pi$ cm; b. $20,8\pi$ dm; c. $7,6\pi$ m.

**4.** Conturul unui iaz perfect circular a fost măsurat cu ajutorul unei rulete și s-a obținut valoarea aproximativă 75,4 metri. Care este, cu aproximație la întregi, raza iazului?

**5.** Dorim să confecționăm, din sârmă, 20 de cercuri cu raza de 8 cm. Care este lungimea sârmei, exprimată în număr întregi de metri, ce trebuie achiziționată? (folosiți în calcul $\pi \simeq 3,14$)

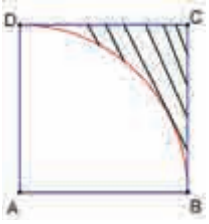
**6.** Calculați raza discului cu aria:
a. $81\pi$ cm$^2$; b. $121\pi$ cm$^2$; c. $0,49\pi$ dm$^2$.

**7.** Determinați lungimea unui arc de cerc cu măsura de 90°, știind că lungimea cercului este $28\pi$ cm.

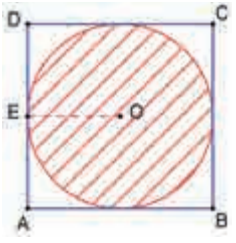
**8.** Aria unui sector de cerc corespunzător unui unghi la centru cu măsura de 30° este $75\pi$ cm$^2$. Calculați aria discului din care provine sectorul de cerc, precum și lungimea cercului și a arcului de cerc corespunzător sectorului.

**9.** Două cercuri concentrice au razele de 9 cm și 14 cm. Calculați aria suprafeței situate în exteriorul cercului cu raza de 9 cm, dar în interiorul cercului cu raza de 14 cm.

**10.** În figura alăturată, *ABCD* este pătrat cu latura de 12 cm, iar arcul *BD* corespunde unghiului la centru *BAD* din cercul cu centrul *A* și raza *AB*. Calculați aria suprafeței hașurate, aproximând rezultatul la sutimi (folosiți în calcul $\pi \simeq 3,14$).




**11.** Dintr-un carton în formă de pătrat, *ABCD*, cu latura de 16 cm, se decupează un disc de suprafață maximă (discul înscris în pătrat) – vezi figura alăturată. Calculați raza *OE* și aria discului. Demonstrați că suprafața de carton care se pierde prin decupare reprezintă mai puțin decât 22% din suprafața cartonului (folosiți în calcul $\pi \simeq 3,14$).




**12.** O bicicletă are diametrul aproximativ al roților de 70 cm. Calculați ce distanță aproximativă se parcurge cu bicicleta, știind că o roată a acesteia a făcut 200 de rotații complete (folosiți în calcul $\pi \simeq 3,14$, iar rezultatul se aproximează la număr întreg de metri).

**1.** Considerăm un cerc de centru $O$ și rază 8 cm, precum și un punct $A$ astfel încât $OA = 5$ cm. Prin punctul $A$ construim coardele $BC$ și $DE$ perpendiculare. Dacă $M$ este mijlocul coardei $BC$ și $N$ este mijlocul coardei $DE$, demonstrați că $\sphericalangle MON = 90°$ și calculați lungimea segmentului $MN$.

**2.** Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt situate pe cercul $C(O, r)$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 120°$. Ce fel de triunghi este triunghiul $ABC$?

**3.** În cercul de centru $O$, coarda $CD$ este perpendiculară pe diametrul $AB$, iar punctul lor de intersecție, notat $M$, este mijlocul razei $OB$. Demonstrați că triunghiul $ADC$ este echilateral.

**4.** Punctele $A$, $B$ și $C$ aparțin cercului de centru $O$, $M$ este mijlocul arcului de cerc $AB$, iar $N$ este mijlocul arcului de cerc $BC$. Dacă $OB \perp MN$, demonstrați că $AB \equiv BC$.

**5.** Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt situate pe cercul $C(O, r)$, iar $M$ și $N$ sunt mijloacele coardelor $AB$, respectiv $AC$. Dacă $AO \perp MN$, demonstrați că $AB \equiv AC$.

**6.** Segmentele $AB$ și $CD$ sunt două coarde congruente și perpendiculare dintr-un cerc, intersecția lor fiind punctul $M$. Demonstrați că $MO$ este bisectoarea unghiului format de cele două coarde.

**7.** Construiți, printr-un punct situat în interiorul unui cerc, două coarde congruente și perpendiculare. Ce tip de patrulater este cel determinat de capetele celor două coarde?

**8.** Triunghiul $ABC$ este înscris într-un cerc de centru $O$. Punctele $M$ și $N$ sunt intersecțiile bisectoarelor unghiurilor $B$, respectiv $C$, cu cercul. Știind că $\sphericalangle BAC = 48°$, calculați măsura arcului $MAN$ și măsura unghiului $MAN$.

**9.** Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt situate pe cercul de centru $O$, iar bisectoarea unghiului $BAC$ intersectează cercul în punctul $D$. Demonstrați că $OD$ este perpendiculară pe coarda $BC$.

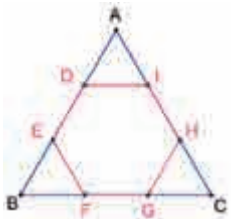
**10.** Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt situate pe cercul de centru $O$, astfel încât coardele $AB$ și $AC$ sunt congruente, iar $\sphericalangle BAC = 70°$. Punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele arcelor mici $\overset{\frown}{AB}$, respectiv $\overset{\frown}{AC}$, iar punctul $P$ este situat pe arcul de cerc $\overset{\frown}{BC}$ care nu conține punctul $A$.
a. Calculați măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ și măsura arcului mic $\overset{\frown}{AN}$.
b. Calculați măsura unghiului $MPN$.
c. Se modifică măsura unghiului $MPN$ în ipoteza în care coardele $AB$ și $AC$ nu sunt congruente? Justificați.

**11.** Considerăm două drepte paralele $a$ și $b$, astfel încât distanța dintre ele este egală cu 6 cm.
a. Desenați un cerc tangent la ambele drepte.
b. Câte cercuri tangente la ambele drepte se pot desena? Formulați o concluzie privind pozițiile centrelor acestor cercuri. Discutați la nivelul clasei concluziile voastre și rețineți-o pe cea care descrie cel mai bine pozițiile centrelor.
c. Dacă punctul $A$ este situat între cele două drepte, câte cercuri ce trec prin $A$, tangente la cele două drepte, se pot desena?

**12.** În cercul de centru $O$ considerăm coarda $AB$ și punctul $M$ aparținând arcului mic $\overset{\frown}{AB}$. Demonstrați că:

a. dacă $M$ este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$, atunci tangenta la cerc în punctul $M$ este paralelă cu coarda $AB$.
b. dacă tangenta la cerc în punctul $M$ este paralelă cu coarda $AB$, atunci $M$ este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$.

**13.** Pe cercul cu centru în $O$ se consideră punctele $A$ și $B$, astfel încât $\sphericalangle AOB = 120°$. Tangentele la cerc în punctele $A$ și $B$ se intersectează în punctul $C$. Demonstrați că triunghiul $ABC$ este echilateral.

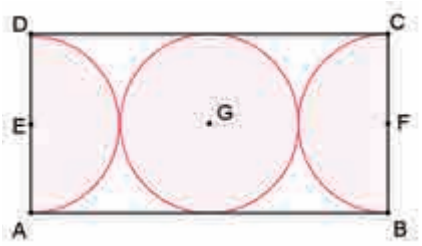



**14.** În figura alăturată, laturile triunghiului echilateral $ABC$ au fost împărțite în câte 3 segmente congruente. Demonstrați că $DEFGHI$ este poligon regulat.

**15.** Dreptele $a$, $b$, $c$ și $d$ sunt tangente la cercul de centru $O$, cu $a \parallel b$ și $c \parallel d$. Punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ sunt intersecțiile dreptelor $a$ și $b$ cu dreptele $c$ și $d$. Stabiliți ce tip de patrulater determină cele patru puncte de intersecție și demonstrați că diagonalele acestuia conțin centrul cercului.

**16.** Demonstrați că mijloacele laturilor unui poligon regulat cu $n$ laturi sunt vârfurile unui nou poligon regulat, pentru: a. $n = 3$; b. $n = 4$.

**17.** În figura alăturată este prezentată schița unei grădini dreptunghiulare în interiorul căreia sunt trei zone, pe care se plantează flori, una în formă de cerc – tangentă la laturile $AB$ și $CD$, și două în formă de semicerc, de diametre $AD$, respectiv $BC$. Latura $AD$ are lungimea de 10 metri.




a. Demonstrați că punctele $E$, $G$ și $F$ sunt coliniare;
b. Demonstrați că lungimea laturii $AB$ este de 20 metri.
c. Demonstrați că punctele $A$, $G$ și $C$ sunt coliniare.
d. Calculați aria suprafeței plantate cu flori și aria suprafeței interioare grădinii pe care nu se plantează flori (folosiți în calcul $\pi \simeq 3,14$).

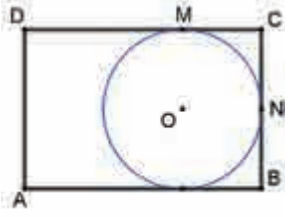


## TESTUL 1

**1.** Triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 65°$ și $\sphericalangle C = 85°$, este înscris în cercul de centru $O$. Punctul $D$ este mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{BC}$, iar $AD \cap BC = \{E\}$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:
a. măsura arcului mic $\overline{AB}$ este egală cu ...°;
b. măsura arcului mare $\overset{\frown}{BC}$ este egală cu ...°;
c. măsura arcului mic $\overline{BD}$ este egală cu ...°;
d. măsura unghiului la centru $\sphericalangle AOC$ este egală cu ...°;
e. Demonstrați că $AE$ este bisectoare a triunghiului $ABC$.

**2.** Considerăm cercul de centru $O$ și rază $r$, punctul $A$ aparținând cercului și punctul $B$ exterior cercului, astfel încât punctele $O$, $A$ și $B$ să fie coliniare și $OA \equiv AB$. Mediatoarea segmentului $OA$ intersectează cercul în punctele $D$ și $E$.
a. Demonstrați că dreapta $BD$ este tangentă cercului.
b. Demonstrați că triunghiul $BDE$ este echilateral.

**3.** În figura alăturată este prezentată schematic o grădină în interiorul căreia este construit un iaz. $ABCD$ este dreptunghi cu $AB = 30$ m, $BC = 20$ m, și cercul de centru $O$ este tangent laturilor $AB$, $BC$ și $CD$ ale dreptunghiului.




a. Demonstrați că raza cercului este 10 m.
b. Suprafața grădinii, mai puțin zona iazului, este însămânțată cu gazon. Calculați aria suprafeței cu gazon, aproximând rezultatul la întregi (folosiți în calcul $\pi \simeq 3,14$).

*Punctaj: 1. 3p. 2. 3p. 3. 3p. Oficiu 1p.*

## TESTUL 2

**1.** Pe un cerc de centru $O$ considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, în această ordine, așezate în sensul mișcării acelor de ceasornic. Dacă $\overline{AB} = 80°$, $\overset{\frown}{BC} = 100°$ și $\overline{CD} = 60°$, atunci:
i. Măsura arcului mic $\overline{AD}$ este egală cu: a. 100°; b. 120°; c. 140°; d. 180°.
ii. Măsura unghiului $ACB$ este egală cu: a. 100°; b. 80°; c. 50°; d. 40°.
iii. Măsura unghiului $BOC$ este egală cu: a. 100°; b. 80°; c. 60°; d. 50°.
iv. Segmentul $AC$ este: a. rază; b. coardă, dar nu diametru; c. diametru; d. arc de cerc.

**2.** Pătratul $ABCD$ este înscris într-un cerc, iar punctul $M$ este situat pe arcul mic $\overline{AB}$. Calculați măsura unghiului $AMB$ și demonstrați că $MC$ și $MD$ împart unghiul $AMB$ în trei unghiuri congruente.

**3.** Considerăm un cerc de diametru $AB = 20$ m și punctul $M$, mijlocul unuia dintre semicercurile determinate de diametru. Punctele $C$ și $D$ sunt simetricele punctelor $A$, respectiv $B$, față de punctul $M$.
a. Demonstrați că $ABCD$ este un poligon regulat.
b. Calculați lungimea totală a conturului figurii obținute (contur: *linie închisă ce mărginește o suprafață*).
c. Calculați aria totală a figurii obținute.

*Punctaj: 1. 4p. 2. 2p. 3. 3p. Oficiu 1p.*

# SEGMENTE PROPORȚIONALE. TEOREMA PARALELELOR ECHIDISTANTE

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Considerăm două segmente, $AB$ și $CD$, cu lungimile de 5 cm, respectiv 8 cm. Putem calcula raportul lungimilor lor: $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{8}$ sau $\frac{CD}{AB} = \frac{8}{5}$.

➢ Pentru triunghiul din figura alăturată putem calcula raportul lungimilor laturilor $AC$ și $BC$: $\frac{AC}{BC} = \frac{45\text{ mm}}{50\text{ mm}} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$




**OBSERVAȚII**

❖ Raportul a două segmente este un număr pozitiv și nu are unitate de măsură (chiar dacă mărimile care intervin în raport au).

❖ Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.

**DEFINIȚIE**

*Raportul a două segmente* este raportul lungimilor celor două segmente, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Considerăm segmentele cu lungimile: $AB = 5$ cm, $CD = 8$ cm, $MN = 10$ cm și $PQ = 16$ cm. Verificați dacă lungimile celor patru segmente sunt termenii unei proporții.

*Rezolvare*. Numerele 5, 8, 10 și 16 sunt proporționale dacă verifică proprietatea fundamentală a proporției.

Cum $5 \cdot 16 = 10 \cdot 8$, obținem $\frac{5}{8} = \frac{10}{16} \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$, deci lungimile segmentelor date sunt proporționale.

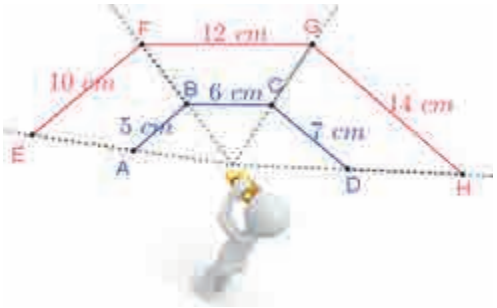
**NE AMINTIM!**

În clasa a VI-a ați învățat despre *mărimi direct proporționale*. Discutați la nivelul clasei pentru a actualiza cunoștințele respective, precum și cele referitoare la *proprietatea șirului de rapoarte egale*.

**DEFINIȚIE**

Spunem că patru *segmente* sunt *proporționale*, dacă lungimile lor reprezintă termenii unei proporții.

Segmentele $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots, A_nB_n$ sunt proporționale cu segmentele $C_1D_1$, $C_2D_2, C_3D_3, \ldots, C_nD_n$ dacă lungimile lor, exprimate în aceeași unitate de măsură, sunt proporționale: $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \ldots = \frac{A_nB_n}{C_nD_n} = k$. Valoarea $k$ a acestor rapoarte se numește *coeficient de proporționalitate*.




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

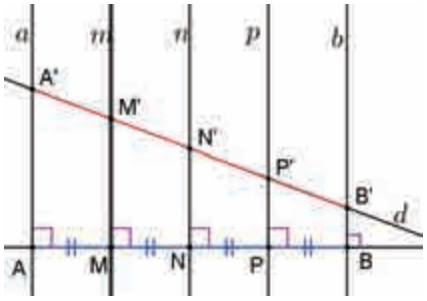
Verificați dacă segmentele $AB$, $BC$, $CD$ sunt proporționale cu segmentele $EF$, $FG$, $GH$, știind că $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 7$ cm, $EF = 10$ cm, $FG = 12$ cm și $GH = 14$ cm.

*Rezolvare.*

Verificăm dacă $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} \Leftrightarrow \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14}$, adevărat, deci sunt proporționale, iar coeficientul de proporționalitate este $\frac{1}{2}$.

## DESCOPERIȚI

În figura alăturată, punctele $M$, $N$ și $P$ împart segementul $AB$, de lungime 8 cm, în segmente consecutive congruente. Dreptele $a$, $m$, $n$, $p$ și $b$ sunt perpendiculare pe dreapta $AB$.




Observați figura și colaborați la nivelul clasei pentru a formula răspunsuri la următoarele întrebări sau cerințe:

✓ Care este distanța dintre dreptele $a$ și $m$, dintre $m$ și $n$, dintre $n$ și $p$, respectiv dintre $p$ și $b$? Ce constatați?

✓ Măsurați și comparați lungimile segmentelor $A'M'$, $M'N'$, $N'P'$ și $P'B'$. Formulați o concluzie. Depinde concluzia voastră de poziția dreptei $d$?

**DEFINIȚIE**

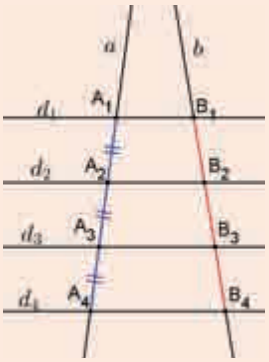
Trei sau mai multe drepte paralele, situate la distanțe egale, se numesc *paralele echidistante*.

**TEOREMĂ**

**TEOREMA PARALELELOR ECHIDISTANTE**

Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice secantă segmente congruente.

Cu alte cuvinte, dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$, $\{A_1\} = d_1 \cap a$, $\{A_2\} = d_2 \cap a$, $\{A_3\} = d_3 \cap a$, $\{A_4\} = d_4 \cap a$ și $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4$, atunci $B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv B_3B_4$, unde $\{B_1\} = d_1 \cap b$, $\{B_2\} = d_2 \cap b$, $\{B_3\} = d_3 \cap b$ și $\{B_4\} = d_4 \cap b$.




*Întrebare.* Putem spune că dreptele $d_1$, $d_2$, $d_3$ și $d_4$ sunt paralele echidistante? Justificați răspunsul.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

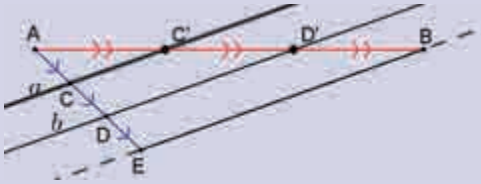
➢ Considerăm un segment $AB$ cu lungimea de 15 cm și punctul $M$ pe acesta astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$. Calculați lungimile segmentelor $AM$ și $MB$.

*Rezolvare.* Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, folosind proporțiile derivate obținem $\frac{AM}{AM+MB} = \frac{2}{2+3} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$, și cum $AB = 15$ cm, obținem $AM = 6$ cm și $MB = 9$ cm.

➢ Considerăm un segment $AB$ cu lungimea de 8 cm. Construiți pe segment punctul $M$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$.

*Rezolvare.* $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, deci segmentul $AB$ trebuie împărțit în 3 segmente congruente, iar lungimea fiecăruia ar fi 2,(6) cm (valoare care împiedică reprezentarea directă a punctului $M$ pe segmentul de lungime 8!).

Desenăm un segment $AE$ de lungime 3 cm, pe care fixăm punctele $C$ și $D$, astfel încât $AC = CD = DE = 1$ cm. Construim paralelele $a \parallel b \parallel EB$.




Folosind teorema paralelelor echidistante, formulați o concluzie referitoare la segmentele determinate de $C'$ și $D'$ pe segmentul $AB$ și stabiliți poziția punctului $M$ pe segmentul de lungime 8 cm, pornind de la desenul alăturat.

## OBSERVAȚIE

*Observație.*

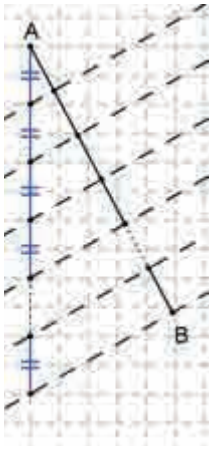
Proporția $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ ne sugerează faptul că, dacă segmentul $AB$ ar fi împărțit în cinci părți egale de lungime $p$ ($AB = 5p$), segmentul $AM$ ar reprezenta două dintre acestea ($AM = 2p$), iar segmentul $BM$ trei dintre ele ($BM = 3p$). Ținând cont de faptul că 15 este un multiplu de 5, este ușor să împărțim segmentul $AB$ în cinci părți congruente, fiecare cu lungimea de 3 cm.




## DESCOPERIȚI

Referitor la problemă anterioară, care a fost avantajul principal al utilizării segmentului de lungime 3 cm? Explicați cum se putea construi un segment ($AE$) format din trei segmente congruente consecutive, folosind o riglă și un compas.

Observați desenul alăturat și formulați o concluzie la cazul mai general, privind modalitatea prin care împărțim un segment de lungime dată în $n$ ($n \geq 3$) segmente congruente.



## EXERSAȚI

**1.** Desenați pe foaia de caiet un segment $AB$ de 10 $u$, unde o unitate reprezintă latura pătrățelului caietului.




Punctele $C$, $D$ și $E$ sunt poziționate conform desenului. Calculați valorile rapoartelor: $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AB}$, $\frac{CD}{CB}$, $\frac{ED}{EB}$, $\frac{AD}{DB}$. Ce puteți spune despre poziția punctului $D$?

**2.** Desenați pe caiet un dreptunghi cu lungimea de 8 pătrățele și lățimea de 4 pătrățele. Calculați:
a. Raportul dintre lățimea și lungimea dreptunghiului.
b. Raportul dintre lățimea și perimetrul dreptunghiului.
c. Raportul dintre lungimea și perimetrul dreptunghiului.

**3.** Reprezentați pe axa numerelor punctele $A(2)$, $B(-5)$, $C(6)$, $D\left(\frac{15}{2}\right)$. Calculați: $\frac{OA}{OB}$, $\frac{OB}{OC}$, $\frac{OA}{OD}$, $\frac{AB}{AC}$ și $\frac{AD}{BC}$, unde $O$ este originea axei.

**4.** Care dintre rapoartele $\frac{4}{0,3}$; $\frac{0,3}{4}$; $\frac{0,4}{0,3}$; $\frac{40}{30}$ și $\frac{0,4}{3}$ reprezintă raportul lungimilor segmentelor $AB$ = = 4 cm și $CD$ = 0,3 dm? Ce unitate de măsură ați folosit pentru a afla raportul?

**5.** Segmentul $MN$ are lungimea de 15 cm, iar punctele $A$ și $B$ sunt situate pe segment, astfel încât $AM$ = 4 cm și $MB$ = 7 cm. Calculați valoarea fiecăruia dintre rapoartele $\frac{MA}{AN}$, $\frac{MB}{BN}$, $\frac{MA}{AB}$, $\frac{AN}{MN}$ și $\frac{AB}{MN}$.

**6.** Punctul $M$ aparține segmentului $AB$ de lungime 20 cm, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{7}$. Calculați lungimile segmentelor $AM$ și $MB$, precum și rapoartele $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AB}{MB}$, $\frac{AM + 2MB}{2AM + MB}$.

**7.** Punctul $M$ aparține dreptei $AB$, dar nu segmentului $AB$, segment de lungime 20 cm, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{7}$. Stabiliți ordinea punctelor pe dreaptă. Calculați lungimile segmentelor $AM$ și $MB$, precum și rapoartele $\frac{AM}{AB}$ și $\frac{AB}{MB}$.

**8.** Un drum, în linie dreaptă, între localitățile $A$ și $B$ are lungimea de 20 km. Localitatea $C$ este situată între cele două localități. Un automobilist, mergând cu viteză constantă pe tot traseul, parcurge drumul de la $A$ la $C$ în timpul $t_1$ și drumul de la $C$ la $B$ în timpul $t_2$, astfel încât $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{4}$. Calculați $AC$ și $CB$.

**9.** Pe dreapta $d$ avem punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, în această ordine. Știind că $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AD}{DC} = \frac{9}{4}$ și lungimea segmentului $AC$ este de 10 cm, aflați lungimile segmentelor $AB$, $BC$, $CD$ și $AD$.

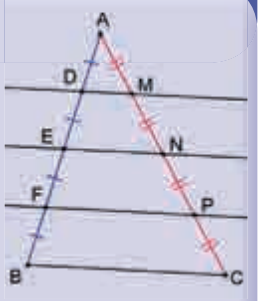
**10.** Punctele $M$ și $N$ aparțin segmentului $AB$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AN}{NB} = \frac{5}{2}$. Demonstrați că $AM = NB$.

**11.** Punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ împart latura $AB$ a triunghiului $ABC$ în cinci părți egale. Fie $MD \parallel NE \parallel PF \parallel QG \parallel BC$, unde punctele $D$, $E$, $F$ și $G$ sunt pe latura $AC$. Arătați că segmentele $AM$, $AN$, $AP$, $AQ$ și $AB$ sunt proporționale cu segmentele $AD$, $AE$, $AF$, $AG$ și $AC$.

# TEOREMA LUI THALES

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Punctele $D$, $E$ și $F$ împart latura $AB$ a triunghiului $ABC$ în patru segmente congruente. Trasăm dreptele paralele $DM \parallel EN \parallel FP \parallel BC$, unde punctele $M$, $N$ și $P$ aparțin laturii $AC$.




a. Demonstrați că $AM = MN = NP = PC$.

b. Demonstrați că segmentele $AD$ și $AM$ sunt proporționale cu $DB$ și $MC$.

*Rezolvare.* a. Reamintiți-vă și aplicați teorema paralelelor echidistante.

b. $AD = \frac{1}{4}AB$ și $DB = \frac{3}{4}AB$, deci $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$; $AM = \frac{1}{4}AC$ și $MC = \frac{3}{4}AC$, deci $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{3}$. Obținem astfel că $\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MC}$, așadar $AD$ și $AM$ sunt proporționale cu $DB$ și $MC$.

## DESCOPERIȚI

Referitor la problema alăturată, dovediți că segmentele $AF$ și $AP$ sunt proporționale cu segmentele $FB$ și $PC$. Se pot găsi și alte proporționalități? Se păstrează proporționalitățile dacă împărțim latura $AB$ a triunghiului în 5 sau 6 sau mai multe segmente congruente? Formulați concluzii care sprijină învățarea.

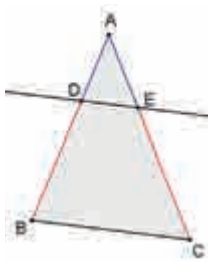
TEOREMĂ

**TEOREMA LUI THALES**

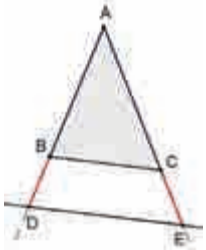
O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale.

## ✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!

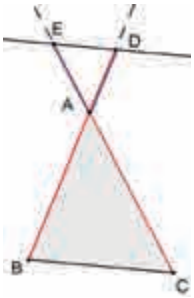
Cele 3 cazuri pentru Teorema lui Thales: $\Delta ABC$, $DE \parallel BC$, $D \in AB$, $E \in AC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.




Punctele $D$ și $E$ sunt situate pe segmentele $AB$, respectiv $AC$.



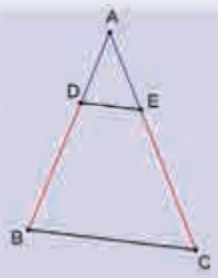

$D$ este situat pe semidreapta ($AB$, dar nu pe segmentul $AB$, iar $E$ este situat pe semidreapta ($AC$, dar nu pe segmentul $AC$.




$D$ este situat pe semidreapta ($BA$, dar nu pe segmentul $BA$, iar $E$ este situat pe semidreapta ($CA$, dar nu pe segmentul $CA$.

Folosind proporții derivate, concluzia teoremei lui Thales poate fi scrisă și sub forma $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ sau $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$ sau $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

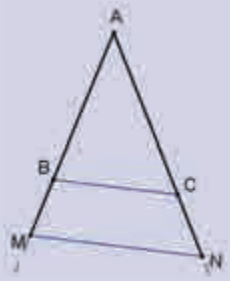



➢ În triunghiul $ABC$, punctele $D$ și $E$ sunt situate pe laturile $AB$, respectiv $AC$, și $DE \parallel BC$. Știind că $AB = 10$ cm, $AD = 4$ cm și $EC = 9$ cm, calculați lungimile segmentelor $DB$, $AE$ și $AC$.

*Rezolvare.* $DB = AB - AD = 6$ cm și, aplicând teorema lui Thales în $\Delta ABC$, $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{AE}{9} \Rightarrow AE = 6$ cm; $AC = AE + EC = 15$ cm.

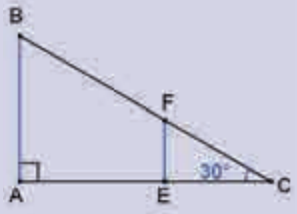
➢ În triunghiul $ABC$, punctele $D$ și $E$ sunt situate pe laturile $AB$, respectiv $AC$, și $DE \parallel BC$. Știind că $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm și $AD = 4$ cm, calculați lungimile segmentelor $AE$, $DB$ și $EC$.

*Rezolvare.* Știind lungimile segmentelor $AB$, $AC$ și $AD$ vom scrie concluzia teoremei lui Thales sub forma: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, echivalentă cu $\frac{4}{8} = \frac{AE}{10} \Leftrightarrow AE = \frac{4 \cdot 10}{8} = 5$ cm; $DB = AB - AD = 8 - 4 = 4$ cm și $EC = AC - AE = 10 - 5 = 5$ cm.




➢ În triunghiul $ABC$, punctele $D$ și $E$ sunt situate pe prelungirile laturilor $AB$ respectiv $AC$ astfel încât punctul $A$ și punctele $D$ și $E$ sunt în semiplane diferite față de dreapta $BC$ și $DE \parallel BC$. Știind că $AC = 7{,}5$ cm, $EC = 2{,}5$ cm și $BD = 3$ cm, calculați lungimile segmentelor $AE$, $AD$ și $AB$.

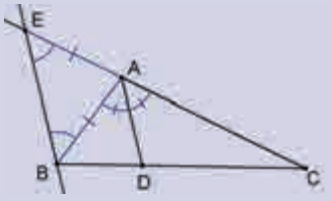
*Rezolvare.* $AE = AC + CE = 10$ cm; $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA} \Leftrightarrow \frac{3}{DA} = \frac{2{,}5}{10} \Rightarrow AD = 12$ cm; $AB = AD - DB = 9$ cm.




➢ Într-un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle C = 30°$, se aleg punctele $E \in AC$ și $F \in BC$, ca în figura alăturată, astfel încât $EF \parallel AB$ și $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$. Dacă $EF = 3$ cm, calculați: $FC$, $BC$ și $AB$.

*Rezolvare.* Din $EF \parallel AB$ și $AC$ secantă obținem că $\sphericalangle E = 90°$ (unghiuri corespondente). În triunghiul $EFC$ dreptunghic avem $\sphericalangle C = 30°$, de unde $EF = \frac{FC}{2}$, adică $FC = 6$ cm. În triunghiul $ABC$, cu $EF \parallel AB$, aplicăm torema lui Thales și obținem $\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC}$, adică $BC = 9$ cm.

Din aplicarea teoremei unghiului de 30° în triunghiul $ABC$ obținem că $AB = 7{,}5$ cm.




➢ Considerăm triunghiul $ABC$, ca în figura alăturată, și bisectoarea $AD$ a acestuia, $D \in BC$. Paralela prin $B$ la $AD$ intersectează dreapta $CA$ în punctul $E$.

a. Demonstrați că triunghiul $ABE$ este isoscel.

b. Demonstrați că $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

*Rezolvare.*

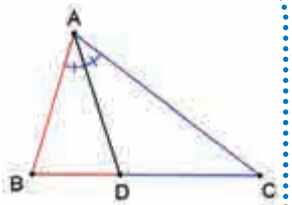
Din $AD \parallel BE$ și secanta $AB$ obținem că $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EBA$ (alterne interne), iar cu secanta $CE$ obținem $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CEB$ (corespondente). Cum $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB$ ($AD$ bisectoare) obținem că triunghiul $ABE$ este isoscel cu $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB$, deci $AE = AB$.

În triunghiul $CBE$ aplicăm teorema lui Thales, rezultând $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AE}$, și cum $AE = AB$, obținem $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

## OBSERVAȚIE

La ultima problemă rezolvată, dacă transformăm proporția $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ în proporția $\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB}$ putem spune că:

*Bisectoarea unghiului A determină pe latura opusă (BC) segmente proporționale cu laturile unghiului.*




## IMPORTANT

Într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile unghiului. Acest enunț poartă numele de *teorema bisectoarei*.

## EXERSAȚI

**1.** Pe latura $AB$ a triunghiului $ABC$ considerăm punctul $D$ și construim $DE \parallel BC$, $E \in AC$.

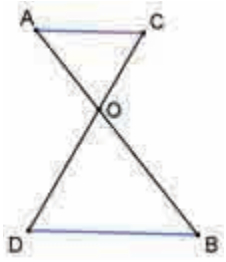
a. Dacă $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm și $BD = 4$ cm, calculați $AD$, $AE$ și $EC$.

b. Dacă $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm și $AD = 2$ cm, calculați $BD$, $AE$ și $EC$.

c. Dacă $AB = 25$ cm, $AE = 15$ cm și $BD = 5$ cm, calculați $AD$, $AC$ și $EC$.

d. Dacă $AD = 6$ cm, $AE = 9$ cm și $BD = 4$ cm, calculați $AB$, $AC$ și $EC$.

**2.** În figura alăturată, $AB$ și $CD$ se intersectează în punctul $O$ și $AC \parallel BD$.



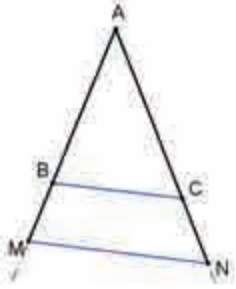

a. Dacă $AO = 16$ cm, $CO = 12$ cm și $AB = 20$ cm, calculați $OD$, $BO$ și $CD$.

b. Dacă $AO = 10$ cm, $CO = 9$ cm și $BO = 5$ cm, calculați $OD$, $AB$ și $CD$.

c. Dacă $DO = 24$ cm, $CO = 9$ cm și $BO = 1{,}6$ dm, calculați $OA$, $AB$ și $CD$.

d. Dacă $AB = 3$ dm, $CO = 70$ mm și $CD = 14$ cm, calculați $OA$, $OB$ și $OD$.

**3.** În triunghiul $ABC$ din figura alăturată, punctele $M$ și $N$ sunt situate pe prelungirile laturilor $AB$, respectiv $AC$, și $MN \parallel BC$.




a. Dacă $AM = 14$ cm, $AB = 7$ cm, $AN = 16$ cm, calculați lungimile segmentelor $MB$, $AC$ și $NC$.

b. Dacă $AM = 9{,}6$ cm, $AB = 3{,}2$ cm, $AC = 8{,}4$ cm, calculați lungimile segmentelor $MB$, $NC$ și $AC$.

c. Dacă $AM = 8\sqrt{7}$ cm, $AB = 2\sqrt{7}$ cm, $CN = 12\sqrt{2}$ cm, calculați lungimile segmentelor $MB$, $CA$ și $AN$.

**4.** În triunghiul $ABC$, construim $DE \parallel FG \parallel BC$, unde $D$ și $F$ sunt situate pe latura $AB$, iar $E$ și $G$ sunt situate pe latura $AC$.

a. Dacă $AD = 4$ cm, $AF = 8$ cm, $AB = 16$ cm, $EG = 3$ cm, calculați lungimile segmentelor $DF$, $FB$, $AE$, $AG$, $GC$ și $AC$.

b. Dacă $AD = 4{,}2$ cm, $AF = 6{,}3$ cm, $AB = 10{,}5$ cm, $AE = 1{,}4$ cm, calculați lungimile segmentelor $DF$, $FB$, $GE$, $GC$, $AG$ și $AC$.

c. Dacă $AD = 5\sqrt{3}$ cm, $AF = 2\sqrt{3}$ cm, $AB = 10\sqrt{3}$ cm, $CE = 10\sqrt{5}$ cm, calculați lungimile segmentelor $DB$, $DF$, $AF$, $AE$, $AG$ și $AC$.

**5.** În triunghiul $ABC$, punctele $D$ și $E$ sunt situate pe laturile $AB$, respectiv $AC$, și $DE \parallel BC$.

a. Dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$, calculați valoarea rapoartelor $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{EC}$ și $\frac{AC}{EC}$.

b. Dacă $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{7}$, $AB = 21$ cm și $EC = 16$ cm, calculați $AD$, $DB$, $AE$ și $AC$.

c. Dacă $\frac{BD}{BA} = \frac{5}{8}$, $AD = 6$ cm și $AE = 2{,}4$ cm, calculați $BD$, $EC$ și $AC$.

**6.** În triunghiul $ABC$, cu $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm și $AC = 12$ cm, considerăm un punct $E$ pe latura $AB$ astfel încât $BE = 2$ cm. Prin punctul $E$ construim

## EXERSAȚI

$EF \parallel AC$, $F \in BC$ și $EG \parallel BC$, $G \in AC$, iar prin punctul $F$ construim $FH \parallel AB$, $H \in AC$. Determinați lungimile segmentelor $FB$, $GC$, $AH$, $HG$, $EF$ și $FH$.

**7.** Considerăm triunghiul $ABC$, mediana $AD$, $D \in BC$ și un punct $E \in AD$. Paralelele prin punctul $E$ la $AB$ și $AC$ intersectează latura $BC$ în punctele $M$, respectiv $N$. Demonstrați că $DM \equiv DN$.

**8.** Prin punctul $D$ de pe latura $AB$ a triunghiului $ABC$ ducem $DE \parallel BC$, $E \in AC$ și $EF \parallel AB$, $F \in BC$. Demonstrați că: a) $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{CF}{FB} = 1$; b) $\frac{AD}{AB} + \frac{CF}{BC} = 1$.

**9.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, notăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{E\}$. Demonstrați că: $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$ și $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$.

**10.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, considerăm un punct $M$ pe latura $AD$ astfel încât $\frac{DM}{MA} = \frac{2}{3}$. Paralela prin $M$ la $AB$ intersectează diagonala $BD$ în punctul $N$ și latura $BC$ în punctul $P$.

a. Dacă lungimea diagonalei $BD$ este 15 cm, calculați lungimile segmentelor $DN$ și $NB$.

b. Calculați valoarea raportului $\frac{CP}{PB}$.

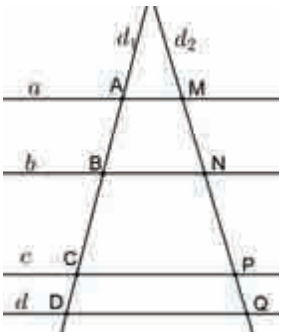
**11.** În triunghiul $ABC$, $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Bisectoarea unghiului $A$ intersectează latura $BC$ în punctul $D$.

a. Calculați valoarea raportului $\frac{BD}{DC}$ (folosiți rezultatul conținut de ultima problemă rezolvată – *teorema bisectoarei*).

b. Calculați lungimile segmentelor $BD$ și $DC$.

## PORTOFOLIU

După rezolvarea punctului *b.* de la problema 10, studiați desenul alăturat și căutați similitudini. Organizați-vă pe grupe de elevi și realizați construcții similare formate din două secante și un număr diferit de drepte paralele de la grupă la grupă . Formulați concluzii privind formarea de segmente proporționale. Puteți formula o concluzie generală?




## ȘTIAȚI CĂ...?

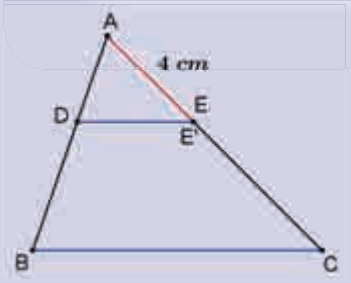


Thales din Milet a fost un filozof grec, considerat părintele științelor, care a avut o contribuție majoră în dezvoltarea matematicii, astronomiei, filozofiei. Deși niciuna dintre scrierile lui nu a fost găsită, opera sa a fost păstrată prin intermediul scrierilor altor autori. În domeniul matematicii, Thales a pus bazele geometriei, după ce s-a familiarizat cu ea în timpul călătoriilor sale în Egipt. Teoremele geometrice elaborate de el au constituit temelia matematicii grecești. Printre demonstrațiile importante pe care le-a făcut se numără următoarele: un cerc este împărțit în două părți egale de diametru; unghiurile bazei unui triunghi isoscel sunt congruente; unghiurile opuse la vârf sunt congruente; un triunghi este determinat dacă sunt date o latură și unghiurile adiacente ei; unghiul înscris într-un semicerc este unghi drept...

# RECIPROCA TEOREMEI LUI THALES

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

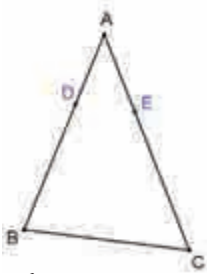
În triunghiul $ABC$, $AC = 10$ cm, punctul $D$ este situat pe latura $AB$, astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$, iar punctul $E$ aparține laturii $AC$ astfel încât $AE = 4$ cm. Demonstrați că paralela dusă prin $D$ la $BC$ intersectează latura $AC$ în punctul $E$.



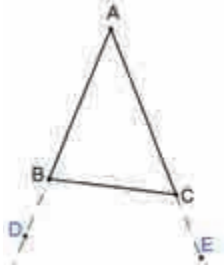

*Rezolvare.* Notăm cu $E'$ punctul în care paralela dusă prin $D$ la $BC$ intersectează latura $AC$ și aplicăm teorema lui Thales: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE'}{AC} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{AE'}{10}$, deci $AE' = 4$ cm. Obținem astfel că $AE = AE' = 4$ cm. Cum punctele $E$ și $E'$ sunt situate pe segmentul $AC$, ele coincid, de unde concluzia.

## NE AMINTIM!

La teorema lui Thales am observat că sunt 3 cazuri distincte pentru $\Delta ABC$, $D \in AB$, $E \in AC$.




Punctele $D$ și $E$ sunt situate pe segmentele $AB$, respectiv $AC$.




$D$ este situat pe semidreapta ($AB$, dar nu pe segmentul $AB$, iar $E$ este situat pe semidreapta ($AC$, dar nu pe segmentul $AC$.




$D$ este situat pe semidreapta ($BA$, dar nu pe segmentul $BA$, iar $E$ este situat pe semidreapta ($CA$, dar nu pe segmentul $CA$.

Despre punctele $D$ și $E$ aflate în una dintre situațiile de mai sus spunem că *ocupă poziții omoloage* pe dreptele suport ale laturilor $AB$ și $AC$ ale triunghiului $ABC$.

RECIPROCA

**RECIPROCA TEOREMEI LUI THALES**

Dacă, în raport cu triunghiul $ABC$, punctele $D$ și $E$ ocupă poziții omoloage pe dreptele $AB$ și $AC$, și $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, atunci $DE \parallel BC$.

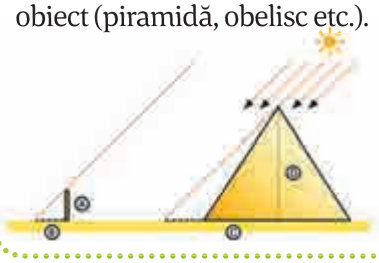
*Observație.* Dacă $\frac{AD}{DB} \neq \frac{AE}{EC}$, atunci dreptele $DE$ și $BC$ nu sunt paralele ($DE \nparallel BC$).

## DESCOPERIȚI

În clasa a VI-a ați demonstrat paralelismul a două drepte folosind unghiurile formate la intersecția unei secante cu cele două drepte. Proprietățile paralelogramelor, studiate anul acesta, reprezintă un instrument bun pentru demonstrarea paralelismului. Reciproca teoremei lui Thales se alătură cu succes acestor metode. Informațiile conținute în ipoteza unei probleme vă pot îndruma în alegerea uneia dintre metode. Discutați la nivelul clasei și găsiți argumente în alegerea uneia dintre metode, în funcție de ipoteza problemei.

## ȘTIAȚI CĂ...?

Se spune că Thales a determinat înălțimea piramidelor din Egipt măsurând umbrele lor în momentul în care umbra unui băț vertical era egală cu lungimea lui. În acest procedeu este implicat un caz particular al *Teoremei lui Thales,* însă acesta s-ar fi putut baza pe observația că, dacă umbra bățului este egală cu lungimea sa, relația are loc pentru orice alt obiect (piramidă, obelisc etc.).



## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

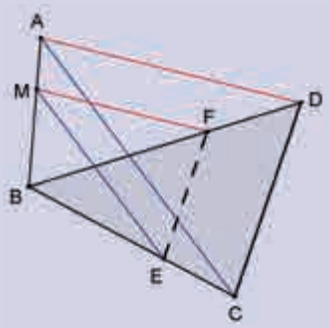
➢ Pe laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului $ABC$ considerăm punctele $D$, respectiv $E$, astfel încât $AB = 12$ cm, $AD = 8$ cm, $AE = 6$ cm și $AC = 9$ cm. Demonstrați că $DE \parallel BC$.

*Rezolvare.* Calculând rapoartele $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ și $\frac{AE}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, obținem $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, $DE \parallel BC$.

➢ Pe laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului $ABC$ considerăm punctele $M$ , respectiv $N$, astfel încât $AB = 25$ cm, $AM = 10$ cm, $AN = 8$ cm și $AC = 16$ cm. Verificați dacă $MN \parallel BC$.

*Rezolvare.* Calculând rapoartele $\frac{AM}{AB} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AN}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, obținem $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ și deci $MN \nparallel BC$.

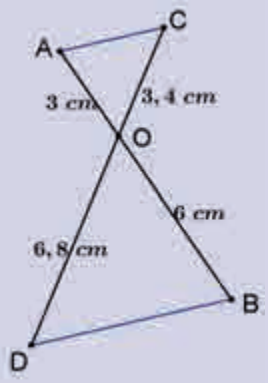
➢ Pe latura $AB$ a patrulaterului $ABCD$ considerăm punctul $M$ și construim paralelele $ME \parallel AC$, $E \in BC$ și $MF \parallel AD$, $F \in BD$. Demonstrați că $EF \parallel CD$.




*Rezolvare.* Observăm că punctele $E$ și $F$ ocupă poziții omoloage pe laturile $BC$ și $BD$ ale triunghiului $BCD$ și ne propunem să demonstrăm egalitatea $\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FD}$.

În $\Delta BAC$, $ME \parallel AC$, $\frac{BE}{EC} = \frac{BM}{MA}$, iar în $\Delta BAD$, $MF \parallel AD$, $\frac{BF}{FD} = \frac{BM}{MA}$, deci $\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FD}$. Conform reciprocei teoremei lui Thales, obținem $EF \parallel CD$.

➢ În figura alăturată observăm segmentele $AB$ și $CD$ care se intersectează în punctul $O$. Folosind valorile de pe desen, demonstrați că $DB \parallel AC$.



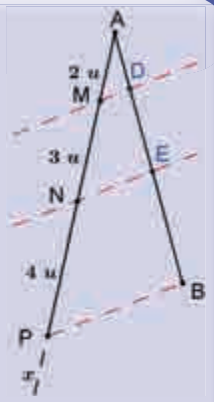

*Rezolvare.* Punctele $A$ și $C$ ocupă poziții omoloage pe prelungirile laturilor $BO$, respectiv $DO$ ale triunghiului $ODB$. $\frac{AO}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{CO}{OD} = \frac{3,4}{6,8} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{AO}{OB} = \frac{CO}{OD}$ și concluzia $DB \parallel AC$.

# ÎMPĂRȚIREA UNUI SEGMENT ÎN PĂRȚI PROPORȚIONALE CU NUMERE (SEGMENTE) DATE

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Considerăm un segment $AB$ de lungime $l$ cm. Construiți pe segment punctele $D$ și $E$ astfel încât segmentele $AD$, $DE$ și $EB$ să fie proporționale cu numerele 2, 3 și 4.

*Rezolvare.* Construim semidreapta $Ax$ și, alegând o unitate de măsură $u$ convenabilă, notăm punctele $M$, $N$ și $P$ astfel încât $AM = 2u$, $MN = 3u$ și $NP = 4u$. Construim paralelele prin $M$ și $N$ la $PB$ și notăm cu $D$ și $E$ punctele de intersecție ale acestora cu $AB$. În triunghiul $ANE$, $MD \parallel NE$, aplicând teorema lui Thales: $\frac{AM}{MN} = \frac{AD}{DE} \Leftrightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{DE}{MN}$. Continuați singuri rezolvarea și demonstrați că $\frac{AD}{AM} = \frac{DE}{MN} = \frac{EB}{NP} \Leftrightarrow \frac{AD}{2} = \frac{DE}{3} = \frac{EB}{4}$.




## DESCOPERIȚI

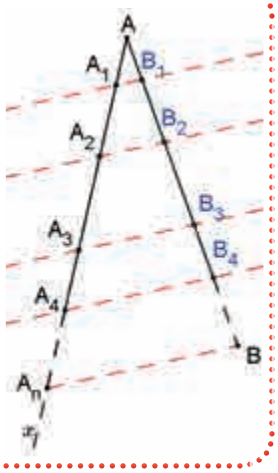
În prima lecție din capitol am văzut cum, folosind *teorema paralelelor echidistante*, putem împărți un segment de lungime dată în $n$ segmente congruente.

De exemplu, putem folosi metoda respectivă pentru a împărți segmentul $AB$ în 9 segmente congruente, fiecare dintre ele cu lungimea $p$, iar punctele $D$ și $E$ sunt astfel încât $AD = 2p$ și $DE = 3p$. Comparați cele două metode!

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Considerăm un segment $AB$ de lungime $l$ cm. Generalizând problema anterioară, pentru a împărți segmentul dat în $n$ segmente consecutive (părți) proporționale cu numerele pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ parcurgem următorii pași:

- Construim o semidreaptă $Ax$, ca în desenul alăturat, și, folosind o unitate de măsură $u$ convenabilă, notăm pe aceasta punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ astfel încât $AA_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, $A_2A_3 = a_3$, ..., $A_{n-1}A_n = a_n$.
- Paralelele prin punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ la $A_nB$ intersectează $AB$ în punctele $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}$.
- Segmentele $AB_1$, $B_1B_2$, ..., $B_{n-1}B_n$ sunt proporționale cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, adică $\frac{BB_1}{a_1} = \frac{B_1B_2}{a_2} = \ldots = \frac{B_{n-1}B}{a_n}$.




## ACTIVITATE PRACTICĂ

Folosind cretă, ruletă și o sfoară, desenați în curtea școlii un paralelogram $ABCD$, $AB = 6$ m, $BC = 3$ m, precum și punctele $M \in AB$ și $N \in BC$, astfel încât $AM$ este o treime din $AB$ și $MN \parallel AC$. Pe echipe, formulați, în scris, pașii parcurși în fiecare etapă. Prezentați în fața colegilor materialul scris și susțineți-vă opiniile personale privind raționamentele făcute. (Va fi necesar să recapitulați proprietățile paralelogramului pentru realizarea activității.)

## EXERSAȚI

**1.** Punctele $M$ și $N$ aparțin laturilor $AB$, respectiv $AC$, ale triunghiului $ABC$. Stabiliți dacă $MN \parallel BC$ în următoarele cazuri:
a. $AB = 3$ cm, $AM = 1$ cm, $AN = 2$ cm, $AC = 6$ cm;
b. $AM = 4$ cm, $MB = 8$ cm, $AN = 6$ cm, $NC = 3$ cm;
c. $AB = 14$ cm, $MB = 3$ cm, $AC = 0,14$ m, $NC = 30$ mm;
d. $MB = 6\sqrt{2}$ cm, $AM = 2\sqrt{6}$ cm, $AN = 5\sqrt{21}$ cm, $NC = 15\sqrt{7}$ cm;
e. $AB = 12$ cm, $AM = 5$ cm, $AN = 7$ cm, $NC = 5$ cm;
f. $AB = 18$m, $MB = 1,2$dam, $AN = 50$ dm, $AC = 1500$ cm.

**2.** Segmentele $AB$ și $CD$ se intersectează în punctul $O$. Stabiliți dacă $DB \parallel AC$ în fiecare dintre cazurile:
a. $AO = 6$ cm, $BO = 10$ cm, $CO = 12$ cm, $DO = 20$ cm;
b. $AO = 2$ cm, $AB = 7$ cm, $CO = 3$ cm, $CD = 10,5$ cm;
c. $BO = 5$ cm, $AB = 11$ cm, $DO = 6$ cm, $CD = 132$ mm;
d. $AO = 7$ cm, $BO = 35$ mm, $CO = 45$ mm, $DO = 9$ cm.

**3.** Punctele $M$ și $N$ aparțin laturilor $AB$, respectiv $AC$, ale triunghiului $ABC$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$, $AN = 6$ cm și $AC = 21$ cm. Demonstrați că $MN \parallel BC$.

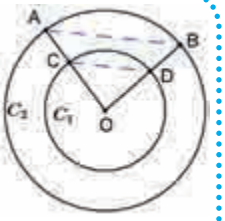
**4.** Punctul $O$ este intersecția diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$. Dacă $AC = 12$ cm, $AO = \frac{3}{4}AC$, $BO = 2$ cm și $OD = 6$ cm, demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este trapez și precizați laturile paralele.

**5.** Punctele $D$ și $E$ aparțin laturilor $AB$, respectiv $BC$, ale triunghiului $ABC$ astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ și $\frac{BE}{BC} = \frac{4}{7}$. Demonstrați că $DE \parallel AC$.

**6.** În patrulaterul $MNPQ$, punctul $A$ aparține diagonalei $MP$. Construim $AB \parallel PN$, $B \in MN$ și $AC \parallel PQ$, $C \in MQ$. Demonstrați că $BC \parallel NQ$.

**7.** Segmentele $AB$, $CD$ și $EF$ se intersectează într-un punct $O$. Demonstrați că, dacă $AC \parallel BD$ și $AE \parallel BF$, atunci $CF \parallel DE$.

**8.** În figura alăturată, cercurile $C_1$ și $C_2$ sunt concentrice. Punctele $A$ și $B$ aparțin cercului $C_2$, iar razele $OA$ și $OB$ intersectează cercul $C_1$ în punctele $C$, respectiv $D$. Demonstrați că $CD \parallel AB$.




**9.** Considerăm un cerc de centru $O$ și rază $OA$. Punctele $B$ și $C$, aparținând tangentei la cerc în punctul $A$, sunt simetrice față de punctul de tangență. Segmentele $OB$ și $OC$ intersectează cercul în punctele $M$ și $N$. Demonstrați că $MN \parallel BC$.

**10.** Considerăm trei semidrepte ($Ox$, ($Oy$ și ($Oz$. Pe semidreapta ($Ox$ se consideră punctele $A$ și $B$ astfel încât $OA = 4$ cm, $OB = 12$ cm, pe semidreapta ($Oy$ se consideră punctele $E$ și $F$, astfel încât $OE = 2$ cm, $OF = 6$ cm, iar pe semidreapta ($Oz$ se consideră punctele $C$ și $D$, astfel încât $OC = 3$ cm, $OD = 9$ cm. Demonstrați că $AC \parallel BD$, $CE \parallel DF$ și $AE \parallel BF$.

**11.** În triunghiul $ABC$, cu $BC = 16$ cm, mediana $AM$, $M \in BC$, are lungimea de 10 cm. Bisectoarea unghiului $AMB$ intersectează segmentul $AB$ în punctul $D$, iar bisectoarea unghiului $AMC$ intersectează segmentul $AC$ în punctul $E$.
a. Calculați valoarea raportului $\frac{AD}{DB}$.
b. Demonstrați că $BC \parallel DE$.
c. Demonstrați paralelismul $BC \parallel DE$, fără a folosi dimensiunile segmentelor $BC$ și $AM$.

**12.** Folosind rigla și compasul împărțiți un segment dat în părți direct proporționale cu numerele 2, 4 și 6.

**13.** Un segment de lungime 10 cm se împarte în segmente proporționale cu trei segmente de lungimi egale cu 5 cm, 7 cm și 8 cm. Realizați desenul și calculați lungimile segmentelor obținute.

# TRIUNGHIURI ASEMENEA. TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII



Observați desenele alăturate și colaborați la nivelul clasei pentru a formula răspunsuri la următoarele întrebări sau cerințe:

✓ Care dintre figuri sunt *asemănătoare*?

✓ Observați segmentele desenate pe căsuța *mai mare*. Măsurați segmentele $C'D'$ și $D'E'$ corespunzătoare punctelor $C'$, $D'$ și $E'$ marcate pe căsuța *mai mică*. Calculați rapoartele segmentelor corespunzătoare din cele două desene. Ce observați?

✓ Măsurați și comparați și unghiurile $\sphericalangle CDE$ și $\sphericalangle C'D'E'$.

✓ Dacă ați desena două cercuri cu raze diferite, ele ar fi *asemenea*? Ce alte figuri geometrice *asemenea* ați mai putea desena?

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Desenați $\Delta ABC: \begin{cases} AB = 3\text{ cm} \\ \sphericalangle A = 90^\circ \\ AC = 4\text{ cm} \end{cases}$ și $\Delta A'B'C': \begin{cases} A'B' = 6\text{ cm} \\ \sphericalangle A' = 90^\circ \\ A'C' = 8\text{ cm} \end{cases}$. Măsurați și comparați între ele unghiurile ascuțite. Calculați, pentru fiecare dintre cele două triunghiuri, lungimile ipotenuzelor (cu ajutorul teoremei lui Pitagora, enunțată în clasa a VI-a) și formulați o concluzie asupra proporționalității laturilor celor două triunghiuri.

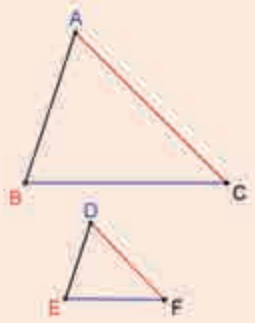
*Rezolvare.* Constatăm, prin măsurare, că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$. Obținem $BC = 5$ cm și $B'C' = 10$ cm și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$, deci laturile celor două triunghiuri sunt proporționale.

**DEFINIȚIE**

Două triunghiuri sunt *asemenea* dacă unghiurile corespunzătoare sunt congruente și laturile corespunzătoare sunt proporționale.

Notăm asemănarea dintre două triunghiuri cu simbolul $\sim$ (se citește *asemenea*).

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle F \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \end{cases}$$



**OBSERVAȚII**

❖ În clasa a VI-a, la *congruența triunghiurilor,* ați învățat că se numesc *elemente corespunzătoare* perechile de unghiuri, respectiv laturi congruente. De exemplu, dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, atunci laturii $BC$ îi *corespunde* latura $EF$, așa cum $\sphericalangle A$ îi *corespunde* $\sphericalangle D$. Păstrăm aceleași convenții de limbaj și în cazul asemănării a două triunghiuri.

❖ În cazul asemănării a două triunghiuri, valoarea raportului lungimilor laturilor se numește *raport de asemănare*.

❖ Ce se întâmplă dacă raportul de asemănare a două triunghiuri asemenea este egal cu 1?

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

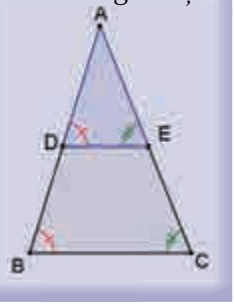
➢ Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\sphericalangle A = 72°$ și $\sphericalangle E = 58°$, calculați măsura unghiului $C$.

*Rezolvare.* $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \Rightarrow \sphericalangle B = 58° \Rightarrow \sphericalangle C = 180° - (72° + 58°) = 50°$.

➢ Știind că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $DE = 5$ cm și $DF = 7$ cm, calculați lungimile laturilor $AC$ și $EF$.

*Rezolvare.* $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \Leftrightarrow \frac{8}{5} = \frac{AC}{7} = \frac{10}{EF}$, obținem $AC = 11,2$ cm și $EF = 6,25$ cm.

*Cunoașterea faptului că două triunghiuri sunt asemenea ne permite argumentarea fie a unor congruențe de unghiuri, fie a unor proporționalități de laturi sau calcul de lungimi ale acestora.*



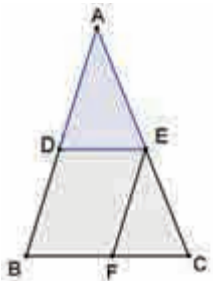

➢ Punctele $D$ și $E$ aparțin laturilor $AB$, respectiv $AC$, ale triunghiului $ABC$ astfel încât $DE \parallel BC$. Demonstrați că triunghiurile $ADE$ și $ABC$ au unghiurile corespunzătoare congruente.

*Rezolvare.* $DE \parallel BC$ și secanta $AB$, obținem $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ – unghiuri corespondente congruente; $DE \parallel BC$ și secanta $AC$, obținem $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ – unghiuri corespondente congruente; $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$ (unghi comun).

**TEOREMA**

**TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII (TFA).**

O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile acestora, un triunghi asemenea cu cel dat.



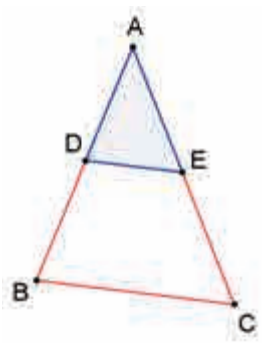

*Ipoteză.* $\Delta ABC$, $DE \parallel BC$, $D \in AB$, $E \in AC$

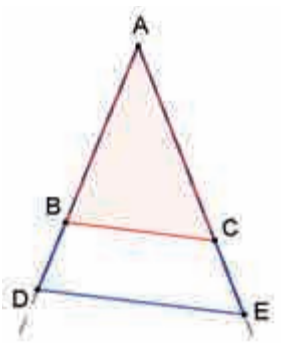
*Concluzie.* $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

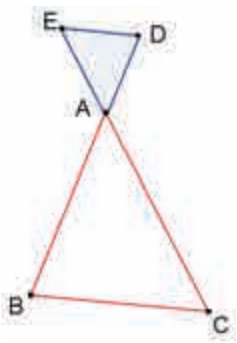
*Demonstrație.* Congruența unghiurilor corespunzătoare din cele două triunghiuri este demonstrată în problema anterioară.

În triunghiul $ABC$: $DE \parallel BC \xrightarrow{T.Thales} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (am utilizat proporții derivate). Construim $EF \parallel AB$, $F \in BC$ și aplicăm din nou teorema lui Thales și proporții derivate, $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Cum patrulaterul $DEFB$ este paralelogram, $DE \equiv BF$, obținem $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ și, în concluzie, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Astfel se verifică condițiile din definiția asemănării, deci $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Ca și la teorema lui Thales, și aici paralela la latura $BC$ poate determina un triunghi cu laturile triunghiului inițial sau cu prelungirile acestora:



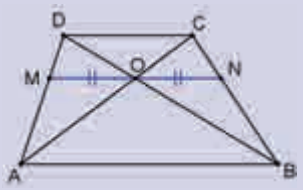




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ În triunghiul $ABC$, cu $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm și $AC = 15$ cm, construim $MN||BC$, $M \in AB$ și $N \in AC$. Dacă $NC = 10$ cm, calculați perimetrul triunghiului $AMN$.

*Rezolvare.* $AN = AC - NC = 15 - 10 = 5$ cm; $\Delta ABC$, $MN||BC \xrightarrow{TFA} \Delta ABC \sim \Delta AMN \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, deci $AM = 3$cm, $MN = 4$cm, iar $P_{AMN} = 12$ cm.

➢ Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, și punctul $O$ aflat la intersecția diagonalelor. Paralela prin $O$ la baze intersectează laturile $AD$ și $BC$ în punctele $M$, respectiv $N$. Demonstrați că punctul $O$ este mijlocul segmentului $MN$.




*Rezolvare.*

Aplicând TFA în $\Delta DAB$, $MO \parallel AB \Rightarrow \Delta DOM \sim \Delta DBA \Rightarrow$ $\frac{DO}{DB} = \frac{MO}{AB}$; aplicând TFA în $\Delta CAB$, $ON \parallel AB \Rightarrow \Delta CON \sim \Delta CAB \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{ON}{AB}$. Cum $\frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA}$ (justificați), obținem $\frac{MO}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow$ $\Rightarrow MO \equiv ON$.

➢ *Descoperiți greșeala din demonstrație:*

În triunghiul $ABC$, considerăm $MN \parallel BC, M \in AB, N \in AC$. Știind că $AM = 5$ cm, $BC = 12$ cm, $AN = 4$ cm și $NC = 8$ cm, determinați laturile celor două triunghiuri.

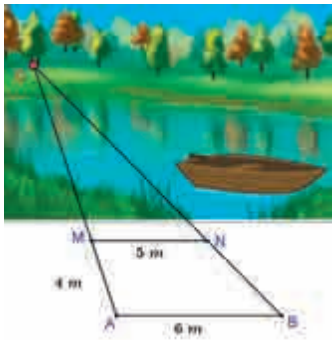
*Rezolvare.* În triunghiul $ABC$, cu $MN||BC$, aplicând teorema fundamentală a asemănării, $\Delta ABC \sim \Delta AMN$, rezultă $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{MB} = \frac{MN}{12}$. Obținem $MB = 10$ cm, $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm, $MN = 6$ cm.

### OBSERVAȚII

Teorema fundamentală a asemănării completează teorema lui Thales, având aceeași ipoteză, doar concluzia diferă, referindu-se la toate laturile triunghiurilor.

### ACTIVITATE PRACTICĂ

O persoană aflată în punctul $A$, ar dori să știe distanța de la el până la copacul situat în punctul $C$ (fără a se uda ☺) și a realizat măsurătorile, pe teren, prezentate în imagine. Calculați distanța dorită.




### DESCOPERIȚI

Ați învățat despre proprietățile *liniei mijlocii* în triunghi și în trapez. Discutați la nivelul clasei și argumentați o nouă metodă de a demonstra: *proprietatea liniei mijlocii în triunghi*, *proprietatea liniei mijlocii în trapez*, precum și *proprietatea centrului de greutate în triunghi*.

## EXERSAȚI

**1.** Scrieți șirurile de rapoarte egale, precum și perechile de unghiuri congruente, care se obțin din asemănările:
a. $\Delta ABC \sim \Delta EFG$;
b. $\Delta ABC \sim \Delta BEF$;
c. $\Delta CAB \sim \Delta BEF$.

**2.** Considerăm două triunghiuri $ABC$ și $DEF$, astfel încât $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Știind că $\sphericalangle A = 64°$ și $\sphericalangle C = 81°$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului $DEF$.

**3.** Considerăm triunghiurile $ABC$ și $MPN$ astfel încât $\Delta ABC \sim \Delta MPN$. Știind că $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $PN = 10$ cm, determinați perimetrul triunghiului $MPN$.

**4.** Demonstrați că orice două triunghiuri echilaterale sunt asemenea.

**5.** Ce fel de triunghi este triunghiul $ABC$, dacă:
a. $\Delta ABC \sim \Delta ACB$; b. $\Delta ABC \sim \Delta CAB$?

**6.** Considerăm triunghiurile $ABC$ și $DEF$, astfel încât $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$, $AC = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle E = 60°$, $\sphericalangle F = 30°$, $DE = 7$ cm și $DF = 7\sqrt{3}$ cm. Demonstrați (folosind definiția) că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

**7.** Raportul de asemănare a două triunghiuri echilaterale este 2, iar triunghiul mai *mic* are lungimea laturii de 10 cm. Calculați perimetrele celor două triunghiuri.

**8.** Pe latura $AB$ a triunghiului $ABC$ considerăm punctul $D$ și construim $DE \parallel BC$, $E \in AC$.
a. Dacă $AB = 6$ cm, $DE = 3$ cm, $BC = 9$ cm și $AC = 12$ cm, calculați $AE$ și $AB$.
b. Dacă $AB = 10$ cm, $AD = 4$ cm, $AE = 6$ cm și $DE = 3$ cm, calculați $AC$ și $BC$.
c. Dacă $AD = 5$ cm, $DE = 4$ cm, $AE = 6$ cm și $AC = 18$ cm, calculați $AB$ și $BC$.

**9.** Segmentele $AB$ și $CD$ se intersectează în punctul $O$, iar $AC \parallel BD$.
a. Dacă $AO = 4$ cm, $AB = 14$ cm, $OC = 6$ cm și $DB = 20$ cm, calculați $AC$ și $OD$.
b. Dacă $AC = 7$ cm, $OC = 8$ cm, $OD = 12$ cm și $OB = 9$ cm, calculați $AO$ și $BD$.

**10.** În triunghiul $ABC$, $MN \parallel AC$, $M \in BC$, $N \in AB$ și $\frac{BM}{MC} = \frac{2}{5}$. Dacă $MN = 3$ cm, calculați lungimea laturii BC.

**11.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC = 12$ cm, punctul $D$ este situat pe latura $AB$ astfel încât $AD$ este o treime din $BD$, iar punctul $E$ este situat pe latura $AC$ astfel încât $AE = 3$ cm.
a. Demonstrați că $DE \parallel BC$.
b. Calculați $BC$ știind că $DE = 4$ cm.

**12.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 18$ cm, $CD = 6$ cm, iar punctul $O$ este intersecția diagonalelor.
a. Demonstrați că $AO = 3 \cdot OC$.
b. Dacă lungimea diagonalei $BD$ este 16 cm, calculați lungimile segmentelor $BO$ și $DO$.

**13.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ cu $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 3$ cm și $DA = 4,6$ cm, considerăm $M$ punctul de intersecție al dreptelor $AD$ și $BC$. Calculați perimetrele triunghiurilor $MDC$ și $MAB$.

**14.** În triunghiul $ABC$ construim $DE \| BC$, $D \in AB$ și $E \in AC$. Demonstrați că segmentul $DE$ este împărțit de mediana $AM$ a triunghiului ($M \in BC$) în două segmente congruente.

**15.** Cercurile $C_1(O_1, R)$ și $C_2(O_2, r)$, $R > r$, sunt tangente exterioare. O tangentă comună $AB$, $A \in C_1(O_1, R)$ și $B \in C_2(O_2, r)$, intersectează dreapta $O_1O_2$ în punctul $C$. Calculați lungimea segmentului $CO_1$ în funcție de lungimile razelor cercurilor.

**16.** Pe mediana $AM$ a triunghiului $ABC$ considerăm punctul $D$. Construim $DE \| AB$, $E \in BC$ și $DF \| AC$, $F \in BC$. Demonstrați că $EM \equiv FM$ și $\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}$.

# CRITERII DE ASEMĂNARE A TRIUNGHIURILOR

**DESCOPERIȚI**

Desenați un triunghi $ABC$, știind că $\sphericalangle B = 45°$ și $\sphericalangle C = 70°$. Comparați desenul cu cel al altor colegi de clasă. Sunt congruente figurile obținute? În colaborare cu un alt coleg din clasă, măsurați fiecare dintre laturile triunghiului desenat și verificați dacă acestea sunt, în perechi, proporționale.

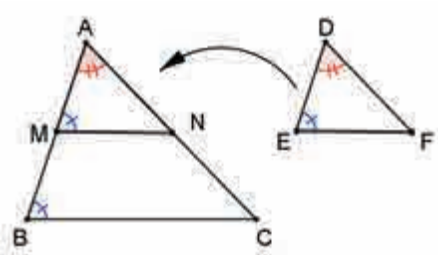
**TEOREMĂ**

**Criteriul I de asemănare – UU**

Dacă două triunghiuri au două perechi de unghiuri respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.

*Ipoteză.* $\Delta ABC, \Delta DEF: \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$

*Concluzie.* $\Delta ABC \sim \Delta DEF$




*Demonstrație.* Considerăm $M \in AB$ și $N \in AC$ astfel încât $AM \equiv DE$ și $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle DEF$.

$\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle DEF \Rightarrow \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$ și, cum acestea sunt unghiuri corespondente pentru dreptele $MN$ și $BC$ cu secanta $AB$, obținem $MN \parallel BC$.

Aplicând T.F.A. în $\Delta ABC$ rezută $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ și, cum $\Delta AMN \equiv \Delta DEF$ (demonstrați!), obținem $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

**OBSERVAȚIE**

În cadrul rezolvării am folosit următoarea afirmație:

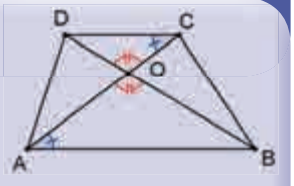
*Dacă* $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ *și* $\Delta DEF \equiv \Delta MNP$ *atunci* $\Delta ABC \sim \Delta MNP$. Demonstrați afirmația!

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ știind că $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 75°$, $\sphericalangle E = 45°$ și $\sphericalangle G = 60°$.

*Rezolvare.* Se calculează $\sphericalangle F = 180° - (75° + 60°) = 45°$ și obținem: $\sphericalangle A = \sphericalangle E$ și $\sphericalangle B = \sphericalangle F$, deci $\Delta ABC \sim \Delta EFG$.

➢ În trapezul $ABCD$, $AB \| CD$, notăm cu $O$ punctul de intersecție al diagonalelor. Demostrați că $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$.

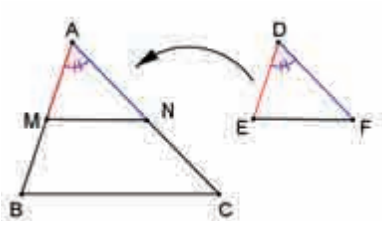



*Rezolvare.* Din $AB \| CD$ și secanta $AC$ obținem că $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCD$ (alterne interne) și, cum $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ (unghiuri opuse la vârf), obținem $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, de unde și concluzia.

**TEOREMĂ**

**Criteriul 2 de asemănare – LUL**

Dacă două triunghiuri au două perechi de laturi corespunzătoare proporționale și unghiurile dintre acestea congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.

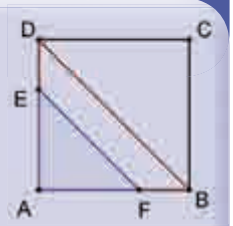



*Ipoteză.* $\Delta ABC, \Delta DEF$: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D, \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$
*Concluzie.* $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
*Demonstrație.* Observând desenul și demonstrația cazului I de asemănare, grupați-vă în perechi și construiți etape de raționament prin care să demonstrați teorema. Comparați raționamentele la nivelul clasei și formulați observații care întăresc învățarea.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ În triunghiurile $ABC$ și $DEF$ se știe că: $\sphericalangle A = 45°$, $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $\sphericalangle D = 45°$, $DE = 8$ cm și $DF = 10$ cm. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

*Rezolvare.* $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ și $\frac{AC}{DF} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ și cum $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ (au aceeași măsură) rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.




➢ În pătratul $ABCD$, punctele $E$ și $F$ aparțin laturilor $AD$ respectiv $AB$ astfel încât $AE = AF = \frac{2}{3}l$, unde $l$ este lungimea laturii pătratului. Demonstrați că $\Delta AEF \sim \Delta ADB$.

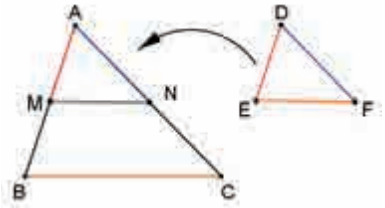
*Rezolvare.* $\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$ și $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle DAB$ (unghiuri drepte) $\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ADB$.

TEOREMĂ

**Criteriul 3 de asemănare – LLL**

Dacă două triunghiuri au laturile respectiv proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.

*Ipoteză*: $\Delta ABC, \Delta DEF$: $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$
*Concluzie*: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
*Demonstrație*: Observând desenul și demonstrația cazului I de asemănare, demonstrați singuri teorema. Verificați apoi corectitudinea raționamentelor prin discuții la nivelul clasei.




**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ În triunghiurile $ABC$ și $MNP$ se cunosc: $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $MN = 8$ cm, $MP = 10$ cm și $NP = 12$ cm.

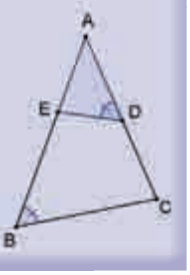
a. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

b. Demonstrați că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PNM$.

*Rezolvare.* a. $\frac{AB}{MN} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{MP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ și $\frac{BC}{NP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, obținem $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$, deci $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

b. $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $B$ și $N$ sunt unghiuri corespunzătoare în cele două triunghiuri, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PNM$.

➢ În triunghiul $ABC$, $D \in AC$ și $E \in AB$ astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ (vezi figura).




a. Demonstrați că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

b. Dacă $AE = 2$ cm, $AD = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 9$ cm, calculați $AB$ și $ED$.

*Rezolvare.*

a. $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$(criteriul I de asemănare).

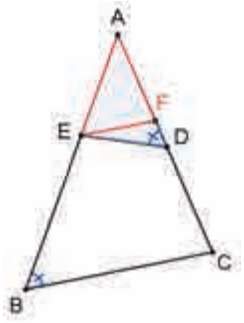
b. $\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{4}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{DE}{9}$ și obținem $AB = 12$ cm și $DE = 3$ cm.

**! ATENȚIE**

Dacă triunghiul $ABC$ nu este isoscel, atunci, pentru orice punct $E$, situat pe latura $AB$, se pot construi două drepte ($ED$ și $EF$ pe desen) care determină formarea unui triunghi asemenea cu triunghiul dat.

Atenție:

$\Delta AEF \sim \Delta ABC$, iar $\Delta AED \sim \Delta ACB$!




**DESCOPERIȚI**

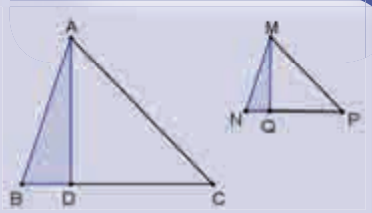
Colaborați la nivelul clasei și faceți un *paralelism* între cazurile de congruență ale triunghiurilor și cazurile de asemănare (mai ales că folosim același tip de notații: LUL, LLL!!). Căutați asemănări, dar și deosebiri între ele!

## APLICAȚII ALE ASEMĂNĂRII

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Considerăm triunghiurile $ABC$ și $MNP$, astfel încât $\Delta ABC \sim \Delta MNP$. Construim înălțimile $AD$, $D \in BC$ în $\Delta ABC$, respectiv $MQ$, $Q \in NP$ în $\Delta MNP$. Demonstrați că raportul lungimilor celor două înălțimi este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

*Rezolvare.* $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și, cum $AD$ și $MQ$ sunt înălțimi, deci $\sphericalangle ADB = \sphericalangle MQN = 90°$, obținem $\Delta ABD \sim \Delta MNQ$ (UU) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{AD}{MQ}$.




**✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!**

*Raportul* înălțimilor *ce pornesc din două vârfuri corespunzătoare a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.*

**PROPRIETATE**

Raportul perimetrelor a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare al celor două triunghiuri.

*Ipoteză:* $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $k$ raportul de asemănare.

*Concluzie:* $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta MNP}} = k, \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta MNP}} = k^2$.

*Demonstrație:* $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow k = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{PM} = \frac{AB + BC + AC}{MN + NP + PM} = \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta MNP}}$.

$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = \frac{AD}{MQ} = k$, unde $AD$ și $MQ$ sunt înălțimi în cele două triunghiuri; $\frac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = \frac{\frac{AD \cdot BC}{2}}{\frac{MQ \cdot NP}{2}} = \frac{AD}{MQ} \cdot \frac{BC}{NP} = k^2$.

## DESCOPERIȚI

✓ În cadrul lecției *Teorema fundamentală a asemănării* ați văzut o aplicație practică a asemănării pentru calcularea (aproximativă) a distanței până la un punct inaccesibil.

Observați imaginea alăturată și colaborați la nivelul clasei pentru a formula răspunsuri la următoarele întrebări sau cerințe:

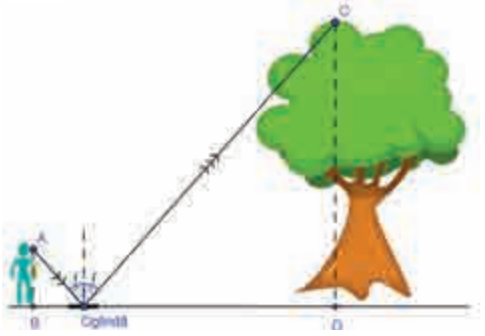


• Care dintre lungimile segmentelor determinate de câte două dintre punctele marcate pe desen sunt măsurabile prin deplasarea persoanei (observatorului)?

• În ipoteza că se cunoaște înălțimea uneia dintre clădiri, cum putem calcula înălțimea celeilalte clădiri?

• În ipoteza că sunt cunoscute înălțimile ambelor clădiri, care este distanța minimă dintre observator și clădirea mai mică, astfel încât acesta să poată vedea ambele clădiri?

✓ La fizică studiați că unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie. Observați în desenul alăturat cum, cu ajutorul unei oglinzi, poți calcula înălțimea copacului.



Calculați și voi înălțimea copacului în ipoteza: $AB = 1{,}6$ m (înălțimea observatorului), $BO = 2$ m (distanța până la oglindă), $DO = 8$ m (distanța oglindă-copac).

✓ Considerăm afirmația:

*Lungimile umbrelor a doi stâlpi, poziționați perpendicular pe planul pământului, sunt proporționale cu înălțimile stâlpilor* (într-o zi cu soare☺).

Reprezentați printr-un desen afirmația și folosiți-o pentru determinarea, de exemplu, a înălțimii stâlpului de susținere a coșului de baschet din curtea școlii voastre.

## EXERSAȚI

**1.** Demonstrați că triunghiurile $ABC$ și $DEF$ sunt asemenea (precizând cazul de asemănare), în fiecare dintre următoarele situații:

a. $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle E = 70°$, $\sphericalangle D = 50°$;

b. $\sphericalangle A = 48°$, $\sphericalangle B = 59°$, $\sphericalangle E = 59°$, $\sphericalangle F = 73°$;

c. $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle D = 60°$, $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm, $DE = 18$ cm, $DF = 14$ cm;

d. $AB = 5\sqrt{2}$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 7\sqrt{5}$ cm, $DE = 15\sqrt{2}$ cm, $EF = 18\sqrt{3}$ cm, $DF = 21\sqrt{5}$ cm;

e. $AB = 9$ cm, $BC = 1$ dm, $AC = 80$ mm, $DE = 45$ mm, $DF = 0{,}4$ dm, $EF = 5$ cm;

f. $\sphericalangle B = 135°$, $\sphericalangle N = 135°$, $AB = 6$cm, $BC = 7$ cm, $DE = 3$ cm, $FE = 35$ mm;

g. $\sphericalangle C = 50°$, $\sphericalangle N = 50°$, $AC = 12$cm, $BC = 10$ cm, $DE = 6$ cm, $EF = 5$ cm.

**2.** Triunghiurile $ABC$ și $MNP$ au $\sphericalangle A = \sphericalangle M$, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 37°$, $\sphericalangle N = 53°$. Este adevărată asemănarea $\Delta ABC \sim \Delta MNP$?

**3.** Demonstrați că orice două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt asemenea.

**4.** Considerăm triunghiurile isoscele $ABC$ ($AB \equiv AC$) și $DEF$ ($DE \equiv DF$), astfel încât $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Precizați valoarea de adevăr a afirmației: *Dacă un unghi al unui triunghi isoscel este congruent cu un unghi al altui triunghi isoscel, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.* Argumentați!

**5.** În triunghiul $ABC$, $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 11$ cm. Punctele $D$ și $E$ sunt pe prelungirile

## EXERSAȚI

laturilor $AB$, respectiv $AC$, astfel încât $BD = 1$ cm, $CE = 6$ cm.
a. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta AED$.
b. Demonstrați că $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$.
c. Calculați lungimea segmentului $DE$.

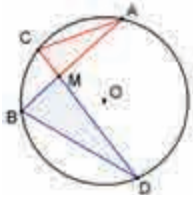
**6.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC$, $\sphericalangle B = 72°$, iar $BD$ este bisectoarea unghiului $B$, $D \in AC$. Demonstrați că $\Delta BDC \sim \Delta ABC$.

**7.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC$, iar mediatoarea laturii $AB$ intersectează dreapta $BC$ în punctul $D$. Demonstrați că $\Delta DAB \sim \Delta ACB$.

**8.** În triunghiul $ABC$, punctele $D$ și $E$ aparțin laturilor $AB$, respectiv $AC$, astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$. Demonstrați că $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

**9.** În triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A > \sphericalangle C$, punctul $D \in BC$ astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB$. Demonstrați că:
a. $\Delta BAD \sim \Delta BCA$; b. $BA^2 = BC \cdot BD$;

**10.** În figura alăturată punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ sunt situate pe cercul de centru $O$. Demonstrați că:
a. $\Delta AMC \sim \Delta DMB$;
b. $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

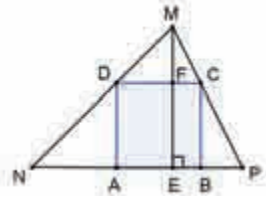



**11.** Pe prelungirea laturii $AD$ a paralelogramului $ABCD$ considerăm un punct $M$, astfel încât $A$ și $M$ sunt situate în semiplane diferite determinate de dreapta $DC$. Punctul $N$ este intersecția dreptelor $MC$ și $AB$. Demonstrați că:
a. $\Delta MDC \sim \Delta CBN$; b. $\frac{MD}{MA} + \frac{NB}{NA} = 1$.

**12.** Înălțimile $AD$ și $BE$ ale triunghiului ascuțitunghic $ABC$, $D \in BC$ și $E \in AC$, se intersectează în punctul $H$. Demonstrați că:
a. $\Delta AHE \sim \Delta BHD$; b. $AH \cdot HD = BH \cdot HE$.

**13.** În triunghiul $ABC$ considerăm înălțimile $AA'$, $A' \in BC$ și $BB'$, $B' \in AC$. Demonstrați că:
a. $CB \cdot CA' = CA \cdot CB'$; b. $CB \cdot AA' = CA \cdot BB'$.

**14.** În figura alăturată pătratul $ABCD$ are vârfurile pe laturile triunghiului $MNP$. Calculați lungimea laturii pătratului, știind că $NP = 15$ cm și lungimea înălțimii $ME$, a triunghiului, este egală cu 10 cm.




**15.** Știm că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 10$ cm, $DE = 77$ cm. Calculați perimetrul triunghiului $DEF$.

**16.** Considerăm triunghiurile $ABC$ și $DEF$, astfel încât $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Știind că $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm, $EF = 15$ cm și raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 0,5, calculați:
a. Lungimile laturilor $DE$ și $DF$.
b. Modulul diferenței dintre perimetrele celor două triunghiuri.
c. Raportul ariilor celor două triunghiuri.

**17.** În triunghiul $ABC$ considerăm $MN \parallel BC$, $M \in AB$, $N \in AC$ și $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$. Dacă perimetrul triunghiului $ABC$ este 30 cm, atunci calculați perimetrul triunghiului $AMN$. Care este valoarea raportului ariilor celor două triunghiuri?

**18.** Triunghiurile $ABC$ și $MNP$ sunt asemenea și aria triunghiului $ABC$ este egală cu 225 cm$^2$.
a. Dacă $AB = 3 \cdot MN$, calculați aria triunghiului $MNP$.
b. Dacă $A_{\Delta MNP} = 900$ cm$^2$, calculați valoarea raportului de asemănare.

**19.** Fiind date două triunghiuri asemenea, demonstrați că raportul lungimilor a două mediane (bisectoare) corespunzătoare (care au un capăt în vârfurile a două unghiuri corespunzătoare) este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.

**20.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 16$ cm, $CD = 8$ cm și lungimea înălțimii este de 6 cm. Dreptele $AD$ și $BC$ se intersectează în punctul $E$. Calculați aria triunghiului $EDC$.

**1.** Considerăm un segment $AB$ și un punct $M$ situat pe dreapta $AB$. Construiți punctul $M$ în fiecare dintre cazurile:
a. $M$ este situat pe segmentul $AB$ și $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}$.
b. $M$ este situat pe segmentul $AB$ și $\frac{MB}{AB} = \frac{3}{4}$.
c. $M$ este situat pe segmentul $AB$ și $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$.
d. $M$ nu este situat pe segmentul $AB$ și $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}$.

**2.** Laturile unui triunghi sunt proporționale cu numerele 10, 15 și 12. Calculați perimetrul triunghiului, știind că cea mai mare latură este egală cu 60 cm. Calculați raportul dintre fiecare latură și perimetrul triunghiului.

**3.** Două localități $A$ și $B$ sunt legate de un drum în linie dreaptă. La ora 8 dimineața o mașină pornește din $A$ spre $B$ cu viteza de 80 km/h și o altă mașină pleacă din $B$ spre $A$ cu viteza de 60 km/h. Ele se întâlnesc, după 2 ore, în punctul $C$.
a. Determinați distanța parcursă de fiecare dintre cele două mașini până la punctul de întâlnire.
b. Determinați valoarea raportului $\frac{AC}{CB}$ și calculați distanța dintre cele două localități.

**4.** Desenați un punct $C$ în interiorul unui segment $MN$ în fiecare din cazurile:
a. $\frac{MC}{NC} = \frac{1}{2}$; b. $\frac{MC}{NC} = \frac{2}{3}$; c. $\frac{MC}{NC} = \frac{4}{3}$.

**5.** În triunghiul $ABC$, $MN||BC$, $M \in (AB$, dar nu pe latură, și $N \in (AC$, dar nu pe latură.
a. Dacă $AM = 6$ cm, $AB = 4$ cm, $AN = 8$ cm, aflați lungimea segmentelor $MB$, $AC$, $NC$.
b. Dacă $AM = 9,5$ cm, $AB = 4,3$ cm, $AC = 8,6$ cm, aflați lungimea segmentelor $MB$, $AC$, $NC$.
c. Dacă $AM = 6\sqrt{5}$ cm, $AB = 2\sqrt{5}$ cm, $CN = 8\sqrt{6}$ cm, aflați lungimea segmentelor $MB$, $AC$, $NC$.

**6.** În triunghiul $RPQ$, punctele $M$ și $N$ ocupă poziții omoloage la $RP$, respectiv $RQ$ și $MN||PQ$. Dacă $RM = a$, $RN = c$, $PM = b$ și $QN = d$, care dintre următoarele egalități sunt adevărate?
a. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; b. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{d}$; c. $\frac{c}{d+c} = \frac{a}{b+a}$; d. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

**7.** În triunghiul $ABC$, $MN||BC$, $M \in AB$ și $N \in AC$.
a. Dacă $AM = 4$ cm, $AB = 10$ cm, $AN = (x - 2)$ cm și $NC = (x + 7)$ cm, aflați valoarea lui $x$.
b. Dacă $AM = 4$ cm, $AN = 6$ cm, $AB = (x + 3)$ cm și $CN = (x + 1)$ cm, aflați valoarea lui $x$.
c. Dacă $AN = x$ cm, $AM = (x + 1)$ cm, $MB = (x + 4)$ cm și $CN = (x + 2)$ cm, aflați valoarea lui $x$.

**8.** În triunghiul $ABC$ $M \in AB$ și $N \in AC$. Verificați dacă $MN||BC$ în următoarele cazuri:
a. $AM = 16$ cm, $AB = 14$ cm, $CN = 3$ cm și $AC = 21$ cm.
b. $AM = 10$ cm, $MB = 4$ cm, $AN = 5$ cm și $AC = 7$ cm.
c. $BM = 3$ cm, $AB = 9$ cm, $CN = 5$ cm și $AC = 20$ cm.

**9.** Stabiliți dacă $\Delta ABC \sim \Delta EFG$, în fiecare dintre următoarele cazuri:
a. $\sphericalangle A = 75°$, $\sphericalangle C = 70°$, $\sphericalangle G = 70°$ și $\sphericalangle E = 75°$;
b. $\sphericalangle B = 36°$, $\sphericalangle F = 36°$, $AB = 18$ cm, $BC = 1,8$ dm, $EF = 200$ mm, $FG = 0,2$ m;
c. $\sphericalangle A = 54°$, $\sphericalangle B = 57°$, $\sphericalangle E = 57°$ și $\sphericalangle G = 69°$;

d. $AB = 8\sqrt{7}$ cm, $BC = 8\sqrt{3}$ cm, $AC = 12\sqrt{11}$ cm, $EF = 15\sqrt{7}$ cm, $FG = 18\sqrt{3}$ cm, $EG = 21\sqrt{11}$ cm;
e. $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 10\sqrt{3}$ cm, $AC = 8\sqrt{6}$ cm, $EF = 2$ cm, $FG = 5$ cm, $EG = 4\sqrt{2}$ cm.

**10.** În triunghiul $ABC$, $EF||BC$, $E \in AB$ și $F \in AC$, $AB = 20$cm, $BC = 2,5$dm, $AC = 0,18$m, $EF = 5$cm. Calculați perimetrele celor două triunghiuri, raportul perimetrelor și raportul ariilor triunghiurilor. A fost necesar să calculați lungimile laturilor triunghiului $AEF$ pentru a-i calcula perimetrul?

**11.** În patrulaterul $ABCD$, cu punctul $M \in AB$, ducem $MN||AC, N \in BC$ și $MP||AD, P \in BD$. Demonstrați că $PN||CD$.

**12.** Triunghiul $ABC$ are laturile $AB = 15$ cm, $BC = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Pe latura $AB$ se alege punctul $M$ astfel încât $AM = \frac{2}{3}AB$ și se construiește $\sphericalangle BMN = \sphericalangle ACB, N \in BC$.
a. Realizați desenul.
b. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta NBM$ și calculați raportul ariilor celor două triunghiuri.
c. Calculați lungimile segmentelor $MN$ și $BN$.

**13.** Triunghiurile dreptunghice $ABC$ ($\sphericalangle A = 90°$) și $BAD$ ($\sphericalangle B = 90°$) au $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB$. Demonstrați că lungimea laturii $AB$ este medie geometrică între lungimile laturilor $AC$ și $BD$.

**14.** Demonstrați că triunghiul format de liniile mijlocii ale unui triunghi este asemenea cu triunghiul inițial. Care este raportul ariilor celor două triunghiuri?

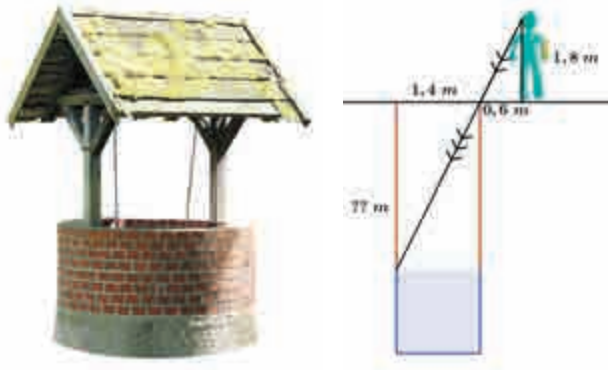
**15.** În triunghiul $ABC$, din punctul $D \in AB$ se duc $DE||BC, E \in AC$, $EF||AB, F \in BC$ și $FG||AC, G \in AB$. Demonstrați că $AD = BG$.

**16.** Rombul $ABCD$ are latura de 12 cm și $\sphericalangle A = 60°$. Punctele $M$ și $N$ împart latura $AB$ în trei părți egale și punctul $P$ este mijlocul laturii $BC$. Dacă $ME||NF||BD||PQ$, $E \in AD$, $F \in AD$ și $Q \in DC$, calculați lungimile segmentelor $AE$, $EF$, $FD$, $DQ$, $QC$, $PQ$, $NF$ și $ME$.

**17.** Segmentele $AB$ și $CD$ se intersectează în puncul $O$. Dacă $AD||BC$, $AD = a$ și $BC = b$, iar $E \in AC$ cu proprietatea $OE||BC$, calculați lungimea segmentului $OE$ în funcție de $a$ și $b$.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Calculați adâncimea unei fântâni, până la nivelul apei, cunoscând datele din figura alăturată.



## TESTUL 1

**Pentru cerințele primelor 2 exerciții alegeți răspunsul corect.**
**Pentru celelalte două probleme redactați etapele de rezolvare.**

**1.** În triunghiurile $ABC$ și $MNP$ se cunosc: $AB = 6$ cm, $AC = 11$ cm, $\sphericalangle A = 70°$, $NP = 60$ mm, $PM = 11$ cm și $\sphericalangle P = 70°$. Atunci:
a. $\Delta ABC \sim \Delta MNP$; b. $\Delta ABC \sim \Delta NPM$; c. $\Delta ABC \sim \Delta PNM$; d. triunghiurile nu sunt asemenea.

**2.** În triunghiul $ABC$, $DE \parallel AB$, $D \in BC$, $E \in AC$, $CE = 3$ cm, $AE = 6$ cm, $BC = 12$ cm și $DE = 5$ cm.
i. Lungimea segmentului $AB$ este egală cu:
a. 10 cm; b. 15 cm; c. 20 cm; d. nu se poate calcula.
ii. Perimetrul triunghiului $CED$ este egal cu:
a. 36 cm; b. 24 cm; c. 12 cm; d. nu se poate calcula.

**3.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 25$ cm, $CD = 15$ cm, $AC = 20$ cm și $AD = 10$ cm, $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor, iar $E$ este punctul de intersecție al laturilor $AD$ și $BC$.
a. Calculați lungimea segmentelor $AO$ și $CO$.
b. Calculați lungimea segmentului $ED$.
c. Calculați cât la sută din aria triunghiului $EAB$ reprezintă aria trapezului $ABCD$.

**4.** Considerăm rombul $ABCD$, cu $\sphericalangle A < 90°$ și lungimea laturii egală cu $l$. O dreaptă oarecare, dusă prin punctul $A$, intersectează dreptele $CB$ și $CD$ în punctele $M$, respectiv $N$.
a. Demonstrați că $\frac{MA}{MN} = \frac{l}{CN}$. Demonstrați că $\frac{1}{CN} + \frac{1}{DN} = \frac{1}{l}$.

*Se acordă:* 1. *1p.* 2. *2p.* 3. *4p.* 4. *2p.* Oficiu *1p.*

## TESTUL 2

**Pentru cerințele primelor 3 exerciții completați cu răspunsul corect.**
**Pentru celelalte două probleme redactați etapele de rezolvare.**

**1.** Punctul $B$ aparține segmentului $AC$, astfel încât $AB = 14$ cm și $AC = 21$ cm. Valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$ este egală cu ... .

**2.** Segmentul $MN$ are lungimea de 15 cm. Punctul $A$ este situat pe dreapta $MN$, dar nu pe segmentul $MN$, astfel încât $\frac{MA}{AN} = \frac{5}{2}$. Lungimea segmentului $AN$ este egală cu ... cm.

**3.** Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DFE$, $AB = 8$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 9$ cm și $DE = 4$ cm, atunci valoarea raportului de asemănare este egală cu ... sau cu .....

**4.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC$, considerăm punctul $D$ aparținând laturii $AC$ astfel încât $BC \equiv BD$.
a. Demonstrați că $\Delta BCD \sim \Delta ABC$. b. Dacă $AC = 10$ cm și $BC = 8$ cm, calculați lungimea segmentului $CD$.

**5.** Considerăm dreptunghiul $ABCD$, $AB = 10$ cm și $BC = 4$ cm. Punctul $M$ aparține laturii $AB$ astfel încât $MB = 4AM$.
a. Calculați valoarea raportului $\frac{AM}{AD}$. b. Demonstrați că $\Delta AMD \sim \Delta BCM$.
c. Demonstrați că $DM \perp MC$.

*Se acordă:* 1. *1p.* 2. *1p.* 3. *1p.* 4. *3p.* 5. *3p.* Oficiu *1p.*

# RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

## PROIECȚII ORTOGONALE PE O DREAPTĂ

### NE AMINTIM

Fiind date o dreaptă $a$ și un punct $O$ avem următoarele două situații:

$O \notin a$

✓ Trasând perpendiculara $ON$ pe dreapta $a$, $ON \perp a$, $N \in a$, spunem că am *coborât* o perpendiculară din $O$ pe dreapta $a$.

Spunem că $N$ *este* piciorul perpendicularei *din* $O$ *pe* $a$.




$O \in a$

✓ Trasând perpendiculara $OM$ pe dreapta $a$, $OM \perp a$, $M \notin a$, spunem că am *ridicat* o perpendiculară în $O$ pe dreapta $a$.

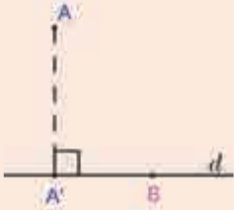
În acest caz punctul $O$ *coincide cu* piciorul perpendicularei *în* $O$ *pe* $a$.




### DEFINIȚIE

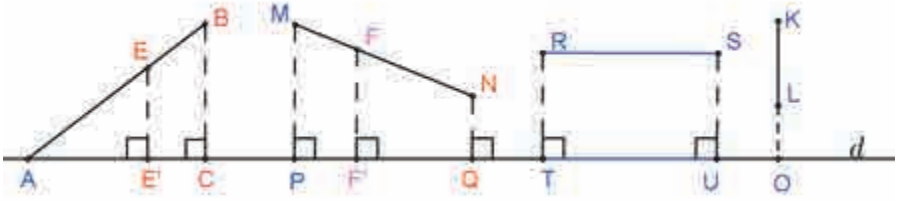
Se numește *proiecție ortogonală* a unui punct pe o dreaptă piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

- notăm $pr_d A = A'$, $AA' \perp d$, $A' \in d$ și $A \notin d$;
- dacă $B \in d$, $pr_d B = B$.




### OBSERVAȚIE

Să observăm construcțiile geometrice următoare:




❖ $A \in d \Rightarrow pr_d A = A$, $pr_d B = C$ și $pr_d E = E'$ – proiecția punctului $E$, ca punct ce aparține segmentului $AB$, este punctul $E'$, situat pe segmentul $AC$.

❖ $pr_d M = P$, $pr_d N = Q$, $pr_d F = F'$; $F$ este situat pe segmentul $MN$, iar proiecția lui este pe segmentul determinat de proiecțiile punctelor $M$ și $N$; $MNQP$ este trapez dreptunghic și $MN > PQ$.

❖ Punctele unui segment inițial se proiectează pe o dreaptă formând un segment pe acea dreaptă determinat de proiecțiile capetelor segmentului inițial.

❖ Considerăm $RS \parallel d$; $pr_d R = T$, $pr_d S = U$; $RSUT$ este dreptunghi și $RS = TU$.

❖ Punctele $K$ și $L$ sunt astfel încât $KL \perp d$ și $pr_d K = pr_d L = O$. Toate punctele segmentului $KL$ se proiectează în același punct $O$.

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Pliați o foaie de hârtie dreptunghiulară după una dintre mediatoarele sale. Desfaceți la loc foaia și, din segmentul de hârtie corespunzător îndoiturii realizați o fantă foarte subțire (nu chiar de la capetele hârtiei). Folosiți o muchie a băncii și o lanternă pentru a lumina foaia de hârtie, dispusă la o înălțime nu foarte mare de bancă, de deasupra acesteia spre muchia băncii, astfel încât să se poată observa dâra luminoasă pe muchie. Faceți legătura cu construcțiile proiecțiilor unui segment. Formulați concluziile!

**SĂ ÎNVĂȚĂM!**

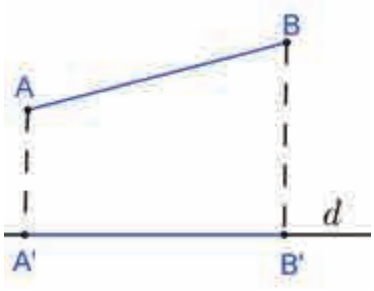
❖ Proiecția ortogonală a unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct:

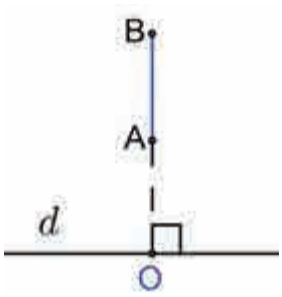
• $pr_dAB = A'B'$, dacă $AB$ nu este perpendicular pe $d$, $A' = pr_dA$ și $B' = pr_dB$; $A'$ diferit de $B'$;

• $pr_dAB = O$, dacă $AB \perp d$, deci $pr_dA = pr_dB = O$.

❖ Proiecția unui segment pe o dreaptă are lungimea mai mică sau egală cu lungimea segmentului.

❖ Proiecția unui segment pe o dreaptă se reduce la un punct când segmentul este perpendicular pe dreaptă.



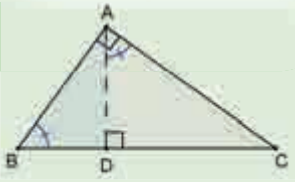

## Teorema înălțimii, teorema catetei

Fie $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$ și înălțimea $AD$, $D \in BC$. Să demonstrăm asemănarea $\Delta ABD \sim \Delta CAD$ și să scriem șirul de rapoarte derivat din aceasta.

*Rezolvare.* $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$ (complementele $\sphericalangle C$) și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDA$ (90°) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CAD \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$.

În proporția $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$, care conține lungimea înălțimii și lungimile proiecțiilor catetelor triunghiului $ABC$ pe dreapta suport a ipotenuzei acestuia, aplicăm proprietatea proporțiilor: $BD \cdot CD = AD \cdot AD \Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot CD$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**




**TEOREMA ÎNĂLȚIMII**

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză:

$\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$: atunci $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$ sau $AD^2 = BD \cdot CD$

**OBSERVAȚIE**

Pentru a simplifica exprimarea, folosim în loc de *proiecțiile catetelor pe dreapta suport a ipotenuzei* exprimarea *proiecțiile catetelor pe ipotenuză*.

EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Să reluăm problema și să demonstrăm și asemănarea $\Delta ABD \sim \Delta CBA$:

*Rezolvare*. $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBA$ (unghi comun celor două triunghiuri) și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CAB$ (unghiuri drepte) $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA} = \frac{AD}{CA}$.

$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow AB \cdot BA = CB \cdot BD \Leftrightarrow AB^2 = CB \cdot BD$




TEOREMA CATETEI

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei și a lungimii proiecției catetei pe ipotenuză:

$\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$: atunci $AB = \sqrt{BC \cdot BD}$ sau $AB^2 = BC \cdot BD$,

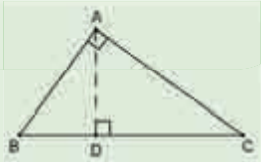
$AC = \sqrt{BC \cdot CD}$ sau $AC^2 = BC \cdot CD$

Ce asemănare de triunghiuri susține relația din teorema catetei, pentru cazul *AC*?

Demonstrați asemănarea și prelucrați șirul de rapoarte pentru a justifica teorema pentru cateta *AC*.

EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ În triunghiul dreptunghic *ABC*, $\sphericalangle A = 90°$, considerăm $AD \perp BC$, $D \in BC$. Știind că $AB = 15$ cm și $BC = 25$ cm, calculați *BD*, *DC*, *AD* și *AC*.




*Ipoteză*: $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, *AD* înălțime $AB = 15$ cm și $BC = 25$ cm

*Concluzie*: lungimile segmentelor: *BD*, *DC*, *AD* și *AC*

*Demonstrație*: Pentru că se cunosc lungimea unei catete și a ipotenuzei, aplicăm mai întâi teorema catetei și putem astfel afla lungimea proiecției acesteia pe ipotenuză: $AB^2 = BC \cdot BD \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 15^2 = 25 \cdot BD \Leftrightarrow BD = 225:25 \Leftrightarrow BD = 9$ cm. Folosind calcule cu lungimi de segmente: $DC = BC - BD \Leftrightarrow DC = 16$ cm.

Din teorema înălțimii: $AD^2 = BD \cdot CD \Leftrightarrow AD^2 = 144 \Leftrightarrow AD = 12$ cm.

Aplicând teorema catetei: $AC^2 = BC \cdot CD \Leftrightarrow AC^2 = 400 \Leftrightarrow AC = 20$ cm.

➢ Folosind notațiile din figura alăturată, calculați:




a. *h* știind că $m = 4$ cm și $n = 10$ cm;

b. *c* știind că $m = 6$ cm și $n = 12$ cm;

c. *m* știind că $h = 5\sqrt{3}$ cm și $n = 15$ cm.

*Rezolvare*: a. Aplicăm teorema înălțimii: $h = \sqrt{4 \cdot 10} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{10}$ cm; b. Calculăm mai întâi $a = m + n \Leftrightarrow a = 18$ cm și apoi aplicăm teorema catetei: $c = \sqrt{6 \cdot 18} \Leftrightarrow c = 6\sqrt{3}$ cm; c. Folosim teorema înălțimii: $h^2 = m \cdot n \Leftrightarrow (5\sqrt{3})^2 = m \cdot 15 \Leftrightarrow m = 5$ cm.

IMPORTANT




✓ Vedeți în desen șase lungimi de segmente (conform notațiilor): catetele, ipotenuza, înălțimea și cele două proiecții ale catetelor pe ipotenuză. Cele două teoreme studiate, împreună cu teorema lui Pitagora pe care urmează să o aprofundăm, ne permit, cunoscând două dintre lungimile segmenetelor enumerate, calcularea celorlalte patru lungimi de segmente.

✓ Nu oricare două lungimi cunoscute vor permite aflarea celorlalte patru lungimi de segmente! Discutați la nivelul clasei cazurile și formulați concluziile potrivite!

## EXERSAȚI

**1.** Realizați pe caiet desenul alăturat și construiți:
a. Proiecțiile punctelor $A$, $G$ și $H$ pe dreapta $d$.
b. Proiecțiile segmentelor $CD$, $MN$, $EF$ și $PQ$ pe dreapta $d$.




**2.** În triunghiul $ABC$, $AB \equiv AC$, considerăm $D = pr_{BC}A$, $E = pr_{AC}D$ și $F = pr_{BC}D$.
a. Demonstrați că $BD \equiv DC$.
b. Numiți segmentele care reprezintă: $pr_{BC}AC$, $pr_{AC}AD$ și $pr_{AB}AD$.
c. Demonstrați că $BF \equiv CE$.

**3.** Considerăm triunghiul echilateral $ABC$ cu $AB = 8$ cm. Determinați lungimea proiecției laturii $AB$ pe dreapta $BC$ și demonstrați că ea este egală cu lungimea proiecției laturii $AB$ pe dreapta $AC$.

**4.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, considerăm înălțimea $AD$, $D \in BC$.
a. Numiți segmentul care reprezintă proiecția catetei $AB$ pe dreapta $BC$.
b. Demonstrați că suma lungimilor proiecțiilor catetelor pe $BC$ este egală cu lungimea ipotenuzei.
c. Demonstrați că $\Delta ABD \sim \Delta CAD$ și $\Delta ABD \sim \Delta CBA$.

**5.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.

| Se știe: | Se cere: |
|---|---|
| a. $BD = 6$ cm, $DC = 10$ cm, | $AD$, $BC$, $AB$ și $AC$; |
| b. $AB = 5\sqrt{3}$ cm, $BD = 5$ cm, | $BC$, $DC$, $AD$ și $AC$; |
| c. $AD = 4\sqrt{3}$ cm, $BD = 4$ cm, | $DC$, $BC$, $AB$, $AC$ și măsura $\sphericalangle C$; |
| d. $AC = 6\sqrt{6}$ cm, $DC = 2 \cdot BD$ | $BD$, $DC$, $BC$, $AD$ și $AB$. |

**6.** În triunghiul dreptunghic isoscel $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, lungimea ipotenuzei este egală cu 12 cm. Calculați lungimea catetelor și a înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

**7.** În triunghiul dreptunghic isoscel $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, lungimea unei catete este egală cu 8 cm. Calculați lungimea ipotenuzei și a înălțimii corespunzătoare acesteia.

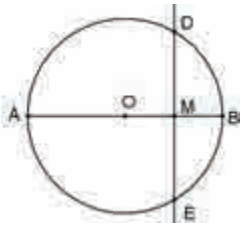
**8.** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este 6 cm, iar lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este $3\sqrt{3}$ cm. Calculați lungimile: ipotenuzei, a proiecției catetei cunoscute pe ipotenuză, a catetei necunoscute și a înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

**9.** În dreptunghiul $ABCD$ construim $AE \perp BD$, $E \in BD$. Calculați aria și perimetrul dreptunghiului știind că $DE = 2\sqrt{3}$ cm și $BE = 4\sqrt{3}$ cm.

**10.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 14$ cm, $DC = 6$ cm și diagonala $AC \perp BC$. Calculați lungimea laturii $AD$ și aria trapezului.

**11.** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză reprezintă dublul lungimii înălțimii corespunzătoare ipotenuzei. Știind că lungimea ipotenuzei este 10 cm, calculați lungimea catetelor și a înălțimii.

**12.** Cercul din figura alăturată are centrul în punctul $O$ și lungimea diametrului $AB$ de 20 cm. Mediatoarea segmentului $OB$ intersectează cercul în punctele $D$ și $E$. Calculați lungimea segmentului $DE$.




**13.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, diagonala $AC$ este perpendiculară pe $BC$. Știind că $AB = 20$ cm și $DC = 12$ cm, calculați lungimea înălțimii, aria și perimetrul trapezului.

**14.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, considerăm mediana $AM$, $M \in BC$ și înălțimea $AD$, $D \in BC$. Știind că $AM = 9$ cm și $DC = 2BD$, calculați lungimile laturilor triunghiului.

# TEOREMA LUI PITAGORA

În clasa a VI-a ați învățat teorema lui Pitagora, verificând relația prin măsurarea laturilor unui triunghi dreptunghic. Să ne amintim și să demonstrăm teorema:

**TEOREMA LUI PITAGORA**

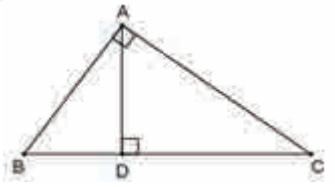
În orice triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei:

$\Delta ABC, \sphericalangle A = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \left(c_1^2 + c_2^2 = i^2\right)$.

*Ipoteză*: $\Delta ABC, \sphericalangle A = 90^\circ$

*Concluzie*: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

*Demonstrație*: Construim înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$ și aplicăm teorema catetei pentru fiecare dintre catete:




$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = BD \cdot BC \\ AC^2 = CD \cdot BC \end{array}\right\} \xrightarrow{+} AB^2 + AC^2 = (BD + CD) \cdot BC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

Considerăm triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$.

a. Dacă $AB = 12$ cm și $AC = 5$ cm, calculați lungimea ipotenuzei $BC$.

b. Dacă $AC = 8$ cm și $BC = 12$ cm, calculați lungimea catetei $AB$.

*Rezolvare.*

a. $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și aplicăm teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 144 + 25 \Leftrightarrow BC^2 = 169$, deci $BC = \sqrt{169} \Rightarrow BC = 13$ cm.

b. $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și aplicăm teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 144 = AB^2 + 64 \Leftrightarrow AB^2 = 80$, deci $AB = \sqrt{80} \Rightarrow AB = 4\sqrt{5}$ cm.

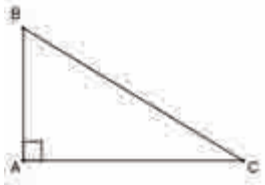
## ȘTIAI CĂ...?

*Teorema lui Pitagora* este una dintre cele mai cunoscute și mai folosite teoreme din geometrie. Ea face legătura dintre cele trei laturi ale triunghiului dreptunghic, permițând calculul lungimii uneia dintre ele atunci când se cunosc lungimile celorlalte două.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Relația din teorema lui Pitagora se poate scrie echivalent (în funcție de latura necunoscută) astfel:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2$$
$$\Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2.$$




## DESCOPERIȚI

Discutați la nivelul clasei ce cunoștințe învățate până la acest moment (la geometrie, cât și la algebră) au permis acum demonstrarea și abordarea unei serii mai largi de probleme. Formulați concluziile!

**IMPORTANT**

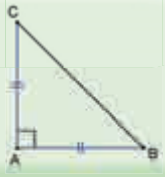
Mai general, putem spune că: *într-un triunghi dreptunghic isoscel lungimea ipotenuzei este $c\sqrt{2}$, unde am notat cu $c$ lungimea comună a celor două catete congruente.*

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Fie triunghiul dreptunghic isoscel $ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AB = 7$ cm. Calculați lungimea ipotenuzei $BC$.

*Rezolvare.* $\Delta ABC$ este dreptunghic; aplicăm teorema lui, Pitagora:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 49 + 49 \Leftrightarrow BC^2 = 98$, deci $BC = \sqrt{98} \Rightarrow BC = 7\sqrt{2}$

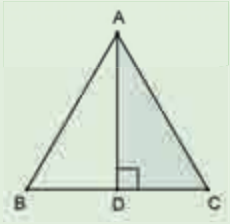



**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Fie triunghiul echilateral $ABC$, $AB = 9$ cm, în care construim înălțimea $AD$, $D \in BC$. Calculați lungimea lui $AD$.

*Rezolvare.* În triunghiul echilateral $ABC$, înălțimea $AD$ este și mediană, deci $BD = DC = \frac{9}{2}$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta ADC$, $\sphericalangle D = 90^\circ$: $AD^2 = AC^2 - DC^2 \Leftrightarrow AD^2 = 81 - \frac{81}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{81 \cdot 3}{4}$, deci $AD = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.




**IMPORTANT**

Mai general, putem spune că: *Înălțimea unui triunghi echilateral are lungimea $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, unde am notat cu $l$ lungimea laturii triunghiului.*

**DESCOPERIȚI**

... din rezolvarea problemei observăm:

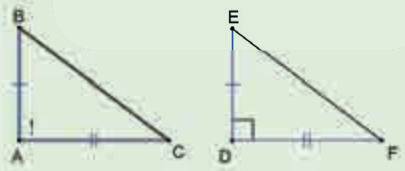
✓ $9^2 + 12^2 = 15^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$, care reprezintă relația dintre laturile unui triunghi dreptunghic;

✓ Din congruența celor două triunghiuri obținem $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, deci și triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

Fie triunghiul $ABC$, în care lungimile laturilor sunt: $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 15$ cm și triunghiul dreptunghic $DEF$, $\sphericalangle D = 90^\circ$ și $DE = 9$ cm și $DF = 12$ cm. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.




*Rezolvare.* Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta DEF$, $\sphericalangle D = 90^\circ$: $EF^2 = DE^2 + DF^2 \Leftrightarrow$

$EF^2 = 225 \Rightarrow EF = 15$ cm, deci $BC \equiv EF$. Ținând cont de ipotezele privind lungimile laturilor, avem $AB \equiv DE$ și $AC \equiv DF$.

Putem deci spune că : $\left.\begin{matrix} AB \equiv DE \\ AC \equiv DF \\ BC \equiv EF \end{matrix}\right| \xrightarrow{\text{LLL}} \Delta ABC \equiv \Delta DEF.$

**RECIPROCA**

RECIPROCA TEOREMEI LUI PITAGORA

Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două dintre laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic. Unghiul drept este unghiul opus celei mai mari dintre laturi.

$\Delta ABC$, $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ$

## EXERSAȚI

**1.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$. Asociați fiecărei litere din coloana A numărul corespunzător din coloana B:

| | A | | B | |
|---|---|---|---|---|
| $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = \ldots$ | a. | | 1. | $10\sqrt{2}$ |
| $AB = 10$ cm, $BC = 10\sqrt{3}$ cm, $AC = \ldots$ | b. | | 2. | $9\sqrt{3}$ |
| $BC = 12\sqrt{5}$ cm, $AB = 2AC$, $AC = \ldots$ | c. | | 3. | 15 |
| $BC = 18$ cm, $\sphericalangle C = 30°$, $AC = \ldots$ | d. | | 4. | 16 |
| | | | 5. | 12 |

**2.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB \equiv AC$, construim înălțimea $AD$, $D \in BC$.
a. Știind că $AC = 25$ cm și $BC = 48$ cm, calculați lungimea înălțimii $AD$.
b. Știind că $AB = 17$ cm și $AD = 15$ cm, calculați aria triunghiului.

**3.** Considerăm rombul $ABCD$, în care punctul $O$ este intersecția diagonalelor.
a. Știind că $AC = 24$ cm și $BD = 12$ cm, calculați lungimea laturii rombului și distanța de la $O$ la latura $BC$.
b. Știind că $\sphericalangle A = 60°$ și $AB = 10$ cm, calculați lungimile diagonalelor și aria.

**4.** Considerăm dreptunghiul $ABCD$.
a. Dacă $AB = 6\sqrt{5}$ cm și $BC = 12$ cm, atunci $AC$ este egală cu ... cm.
b. Dacă $AD = 6$ cm și $BD = 6\sqrt{5}$ cm, atunci $AB$ este egală cu ... cm.

**5.** Considerăm pătratul $ABCD$ și punctul $O$ intersecția diagonalelor acestuia.
i. Dacă $AB = 6$ cm, atunci lungimea lui $AC$ este egală cu:
a) 3 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm; c) 6 cm; d) $6\sqrt{2}$ cm.




ii. Dacă $BD = 8$ cm, atunci lungimea laturii $AB$ este egală cu:
a) 4 cm; b) $4\sqrt{2}$ cm; c) 8 cm; d) $8\sqrt{2}$ cm.
iii. Dacă $CO = 5$ cm, atunci lungimea laturii pătratului este egală cu:
a) $10\sqrt{2}$ cm; b) 10 cm; c) $5\sqrt{2}$ cm; d) 5 cm.

**6.** În paralelogramul $ABCD$, diagonala $BD$ este perpendiculară pe latura $AD$. Dacă $AB = 4\sqrt{5}$ cm și $BD = 8$ cm, calculați perimetrul și aria lui $ABCD$.

**7.** În triunghiul $ABC$ considerăm înălțimea $AD$, $D \in BC$. Știind că $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm și $AD = 2\sqrt{7}$ cm, calculați lungimea laturii $AC$.

**8.** Stabiliți dacă triunghiurile următoare sunt dreptunghice, indicând unghiul drept.
a. $\Delta ABC$: $AB = 17$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 8$ cm;
b. $\Delta DEF$: $DE = 2$ dm, $EF = 2\sqrt{3}$ dm și $DF = 40$ cm;
c. $\Delta MNP$: $MN = 900$ cm, $NP = 3\sqrt{13}$ m, $MP = 60$ dm;
d. $\Delta GHI$: $GH = 3\sqrt{2}$ cm, $HI = 2\sqrt{3}$ cm, $GI = \sqrt{6}$ cm

**9.** În paralelogramul $ABCD$ se cunosc lungimile: $AB = 14$ cm, $AC = 7\sqrt{5}$ cm și $AD = 7$ cm. Determinați lungimea diagonalei $BD$.

**10.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC = 8$ cm, punctul $N$ este mijlocul laturii $AC$, iar $BN = 4\sqrt{3}$ cm. Demonstrați că $\Delta ABC$ este echilateral.

**11.** În pătratul $ABCD$, cu lungimea laturii de 12 cm, considerăm punctul $M$, mijlocul laturii $AB$ și punctul $N$ situat pe latura $BC$ astfel încât $BN = 3$ cm.
a. Calculați lungimile segmentelor $DM$ și $MN$.
b. Demonstrați că $DM \perp MN$.

**12.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 13$ cm, $CD = 9$ cm și $BC = 2\sqrt{13}$ cm. Calculați lungimea laturii $AD$ și demonstrați că $AC \perp CB$.

## EXERSAȚI

**13.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, punctul $M$ este mijlocul laturii $AB$.
a. Dacă $AB = 12$ cm și $BC = 13$ cm, demonstrați că $CM < 8$ cm.
b. Dacă $AC = 4$ cm și $CM = 5$ cm, calculați perimetrul triunghiului $ABC$.

**14.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, construim bisectoarea $BD$, $D \in AC$. Știind că $AB = 2\sqrt{6}$ cm, $BC = 6\sqrt{6}$ cm, calculați lungimile segmentelor $AC$, $AD$ și $BD$.

**15.** Pe laturile $AB$ și respectiv $AC$ ale triunghiului dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 12$ cm, considerăm punctele $D$ și $E$ astfel încât $AD = 4$ cm și $AE = 2$ cm. Demonstrați că $BC = 3DE$, calculând lungimile celor două segmente. Utilizați asemănarea triunghiurilor.

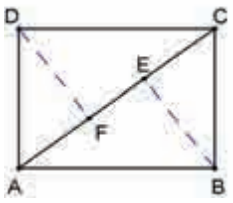
**16.** În dreptunghiul $ABCD$, punctul $O$ este intersecția diagonalelor, $AC = 12$ cm și $\sphericalangle AOD = 60°$.
a. Arătați că lungimea laturii $AB$ este $6\sqrt{3}$ cm.
b. Pe prelungirea laturii $AB$ considerăm punctul $E$ astfel încât $BE$ este o treime din $AB$. Demonstrați că $AC \perp CE$.

**17.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 18$ cm, $CD = 12$ cm și lungimea înălțimii trapezului este 6 cm. Calculați aria, perimetrul și lungimea diagonalelor trapezului.

Dacă acest trapez ar reprezenta un teren care trebuie împrejmuit cu un gard, care dintre elementele pe care le-ați calculat în problemă v-ar fi folositor pentru a afla câți metri de gard sunt necesari? Dacă vreți să cumpărați cantitatea de gard necesară, veți folosi exact valoarea obținută? Ce veți face?

**18.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm și $CD = 24$ cm. Calculați aria trapezului și verificați dacă $DB \perp BC$.

**19.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 8$ cm, diagonalele $AB$ și $CD$ sunt perpendiculare și punctul $O$ este intersecția diagonalelor. Calculați lungimile segmentelor $AO$, $AC$, $AD$, precum și aria trapezului.

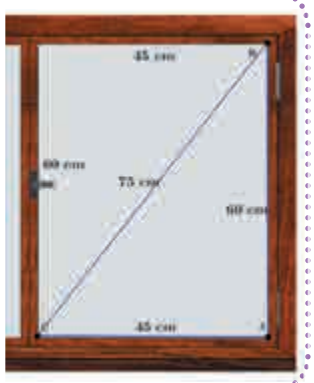



**20.** În figura alăturată este prezentată schița unui parc, $ABCD$ dreptunghi, străbătut de o alee, reprezentată de diagonala $AC$. Se dorește construirea a două alei, $BE$ și $DF$, care să facă legătura dintre intrările marcate cu punctele $B$ și $D$ cu aleea deja construită. Pentru ca timpul de construire și costurile să fie minime, cele două alei trebuie să aibă lungime minimă. Se știe că $AB = 80$ m și $BC = 60$ m. Calculați distanțele de la punctele $E$ și $F$ la punctul $C$.

Calculați lungimea drumului minim pe care îl parcurge o persoană care intră în parc prin poarta $B$ și iese prin poarta $D$.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

Referitor la fereastra din figura alăturată, s-au făcut măsurătorile și notațiile pe desen. Explicați cum folosim valorile pentru a verifica faptul că fereastra are forma dreptunghiulară. Verificați.




*Rezolvare.*

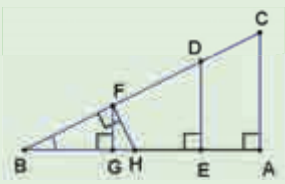
✓ Congruența laturilor opuse justifică faptul că forma ferestrei este cel puțin paralelogram.

✓ $45^2 = 2025$, $60^2 = 3600$ și $75^2 = 5625$ și are loc egalitatea $45^2 + 60^2 = 75^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci, conform Reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$.

# NOȚIUNI DE TRIGONOMETRIE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Observăm în figura alăturată: $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, paralelele $DE \parallel AC$ și $FG \parallel AC$, precum și cele două triunghiuri dreptunghice nou obținute, $\Delta EBD$ și $\Delta GBF$, având unghiul $B$ comun cu $\Delta ABC$.




$\Delta EBD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DE}{CA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{CA}{BC}$;

$\Delta GBF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{FG}{CA} = \frac{BF}{BC} \Leftrightarrow \frac{FG}{BF} = \frac{CA}{BC}$.

Obținem $\frac{CA}{BC} = \frac{DE}{BD} = \frac{FG}{BF}$, adică, pentru oricare dintre cele trei triunghiuri, raportul dintre lungimea catetei opusă unghiului $B$ și lungimea ipotenuzei este același (constant).

➢ Să considerăm și triunghiul dreptunghic $BFH$, care conține unghiul $B$ (observăm desenul), și asemănarea $\Delta BFH \sim \Delta BAC$ (UU): $\frac{FH}{CA} = \frac{BH}{BC}$, proporție echivalentă cu $\frac{FH}{BH} = \frac{CA}{BC}$. Așadar, și pentru $\Delta BFH$ raportul dintre lungimea catetei opusă unghiului $B$ și lungimea ipotenuzei este egal cu șirul de rapoarte anterior.

## IMPORTANT

Cu alte cuvinte, *acest raport nu depinde de triunghiul în care se consideră unghiul*, iar concluzia este că raportul dintre lungimea catetei opusă unui unghi ascuțit și lungimea ipotenuzei *depinde de unghi*.

## DESCOPERIȚI

Folosind aceeași metodă se poate verifica faptul că există și alte rapoarte constante care se pot forma cu laturile unui triunghi dreptunghic, rapoarte care depind de unghiurile ascuțite ale triunghiului.

## DEFINIȚIE

❖ *Sinusul* măsurii unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei.

❖ *Cosinusul* măsurii unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei.

❖ *Tangenta* măsurii unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea catetei alăturate unghiului.

❖ *Cotangenta* măsurii unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea catetei opuse unghiului.

## OBSERVAȚII

❖ Pentru a simplifica exprimarea, folosim în loc de *sinusul (cosinusul, tangenta, cotangenta) măsurii unghiului* exprimarea *sinusul (cosinusul, tangenta, cotangenta) unghiului*.

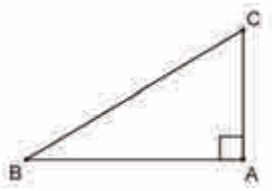
❖ Scrierea prescurtată pentru *sinus, cosinus, tangentă,* respectiv *cotangentă* este *sin, cos, tg, ctg*.

## DESCOPERIȚI

Scrieți rapoartele corespunzătoare pentru sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiului $C$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Referitor la unghiul $B$ din $\Delta ABC$ reprezentat în figura alăturată avem:




$$\sin B = \frac{\text{lungimea catetei opuse}}{\text{lungimea ipotenuzei}} = \frac{AC}{BC},$$

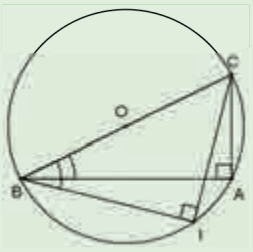
$$\cos B = \frac{\text{lungimea catetei alăturate}}{\text{lungimea ipotenuzei}} = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{tg } B = \frac{\text{lungimea catetei opuse}}{\text{lungimea catetei alăturate}} = \frac{AC}{AB},$$

$$\text{ctg } B = \frac{\text{lungimea catetei alăturate}}{\text{lungimea catetei opuse}} = \frac{AB}{AC}$$

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Fie $\Delta ABC$, $\sphericalangle A = 90°$. Construim un triunghi dreptunghic care să aibă aceeași ipotenuză, $BC$. Observați, în figura alăturată, $\Delta IBC$, unde am folosit un cerc cu diametrul $BC$, pentru a putea construi mai ușor un nou triunghi dreptunghic de aceeași ipotenuză $BC$.




$\Delta ABC$: $\sin ABC = \frac{AC}{BC}$, iar în $\Delta IBC$: $\sin IBC = \frac{IC}{BC}$

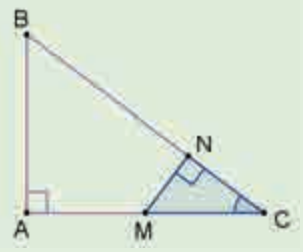
În $\Delta IAC$, latura $IC$ se opune unghiului obtuz, deci $IC > CA \Rightarrow \frac{IC}{BC} > \frac{AC}{BC}$.

Reține: Pentru orice două unghiuri ascuțite $B_1$, $B_2$, dacă $\sphericalangle B_1 < \sphericalangle B_2$ atunci $\sin B_1 < \sin B_2$.

➢ Fie triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm.

a. Calculați sinusul, cosinusul și tangenta unghiului $C$.

b. Calculați lungimea segmentului $MN$, unde punctul $M$ este mijlocul laturii $AC$ și $MN \perp BC$, $N \in BC$.



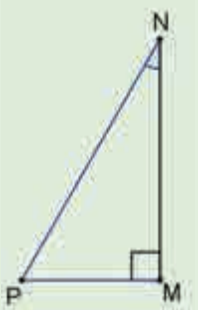

*Rezolvare*:

a. Teorema lui Pitagora în $\Delta ABC$: $BC = 10$ cm, $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\text{tg } C = \frac{3}{4}$

b. În $\Delta MNC$, $\sphericalangle N = 90°$, $MC = 4$ cm, $\sin C = \frac{MN}{MC} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{MN}{4}$, $MN = \frac{12}{5}$ cm.

Observație: Se poate determina $MN$ și din asemănarea $\Delta CMN \sim \Delta CBA$.

➢ Considerăm triunghiul dreptunghic $MNP$, $\sphericalangle M = 90°$; se cunosc: $MP = 6$ cm și $\sin N = 0,4$. Calculați $NP$, $\cos N$, $\sin P$ și $\text{tg } P$.




*Rezolvare*: $\sin N = \frac{MP}{NP} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{6}{NP} \Leftrightarrow NP = 15$ cm;

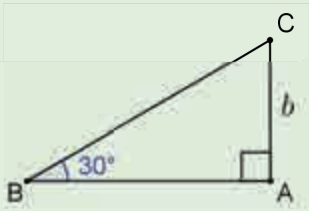
Pentru calcul cosinusului unghiului $N$ avem nevoie de lungimea catetei $MN$ și aplicăm teorema lui Pitagora pentru a o determina: $MN = 3\sqrt{21}$ cm; $\cos N = \frac{MN}{NP} \Leftrightarrow \cos N = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\sin P = \frac{MN}{NP} \Leftrightarrow \sin P = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\text{tg } P = \frac{MN}{MP} \Leftrightarrow \text{tg } P = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Considerăm triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $AC = b$. Calculați $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$ și $\operatorname{ctg} B$.

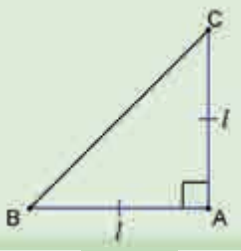
*Rezolvare*: Aplicând teorema unghiului de 30°: $BC = 2 \cdot AC \Rightarrow BC = 2b$;

$\sin B = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b}{2b} \Leftrightarrow \sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 30° = \frac{1}{2}$.




Pentru a calcula $\cos B$ avem nevoie de $AB$ și, aplicând teorema lui Pitagora, obținem $AB = b\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \operatorname{tg} B = \frac{b}{b\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} B = \frac{b\sqrt{3}}{b} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} B = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$;

Folosind faptul că $\sphericalangle C = 90° - \sphericalangle B \Rightarrow \sphericalangle C = 60°$, calculați singuri $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\operatorname{tg} 60°$ și $\operatorname{ctg} 60°$.




➢ Considerăm triunghiul dreptunghic isoscel $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = AC = l$. Calculați $BC$, $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$ și $\operatorname{ctg} 45°$.

*Rezolvare*: $BC = l\sqrt{2}$, $\sin B = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculați și celelalte valori.

## IMPORTANT

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\operatorname{tg} x$ | $\operatorname{ctg} x$ |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

Reamintiți-vă proprietățile cazurilor particulare ale triunghiului dreptunghic cu măsurile unghiurilor ascuțite de 30° și de 60°, respectiv triunghiul dreptunghic isoscel, având unghiurile ascuțite de măsură 45°. Proprietățile laturilor respectivelor triunghiuri, precum și definițiile pentru sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, vă vor ajuta să rețineți mai ușor valorile trigonometrice asociate măsurilor unghiurilor de 30°, de 45°, respectiv de 60°.

Studiați tabelul alăturat și identificați și alte particularități care sprijină reținerea valorilor trigonometrice! Discutați la nivelul clasei concluziile la care ajungeți!

## ACTIVITATE PRACTICĂ




Pentru a calcula valoarea aproximativă a sinusului unui unghi ascuțit puteți folosi un *calculator științific* (cum aveți, de exemplu, pe telefon). Observați în imaginea alăturată valoarea aproximativă pentru $\sin 40° \cong 0{,}642$.

Valoarea aproximativă pentru sinusul oricărui unghi ascuțit, exprimat în grade (numere naturale) poate fi aflată și din tabele trigonometrice pe care le puteți găsi prin accesarea unor site-uri cu resurse educaționale deschise.

## DESCOPERIȚI

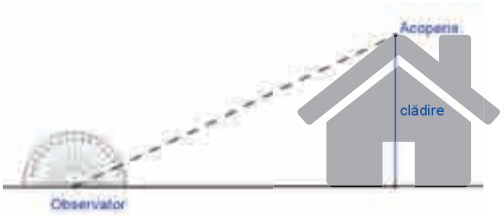
Desenați un triunghi ascuțitunghic $ABC$. Puteți exprima sinusul unghiului $A$ folosind laturile triunghiului? Care dintre liniile importante ale triunghiului trebuie desenată pentru a putea exprima sinusul cerut cu ajutorul lungimilor a două segmente din desen? Formulați o concluzie!

## ȘTIAȚI CĂ...?

Trigonometria (din limba greacă τρίγωνος trígonos = triunghiular și μέτρον métron = măsură) este o ramură a matematicii care studiază unghiuri, triunghiuri și funcții trigonometrice precum sinusul, cosinusul, tangenta si cotangenta.

## ACTIVITATE PRACTICĂ

➢ Observați imaginea alăturată și argumentați modul în care se poate calcula înălțimea clădirii (ce se poate măsura, ce formulă se poate folosi, ...)




➢ Studiați instrumentul alăturat și argumentați utilitatea lui în desfășurarea activității.



## EXERSAȚI

**1.** Pentru fiecare dintre triunghiurile următoare, răspundeți cerințelor date:
a. $\Delta ABC$: $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, calculați $\sin C$;
b. $\Delta DEF$: $\sphericalangle D = 90°$, $DF = 5$ cm, $EF = 8$ cm, calculați $\cos F$;
c. $\Delta BCD$: $\sphericalangle C = 90°$, $BC = 6$ cm, $CD = 9$ cm, calculați $\operatorname{tg} B$;
d. $\Delta MNP$: $\sphericalangle P = 90°$, $MP = 6$ cm, $NP = 10$ cm, calculați $\operatorname{ctg} M$.

**2.** Pentru fiecare dintre triunghiurile următoare, calculați lungimea laturii necunoscute:
a. $\Delta ABC$: $\sphericalangle A = 90°$, $AC = 6$ cm, $\sin B = \frac{3}{4}$, calculați $BC$;
b. $\Delta MNP$: $\sphericalangle M = 90°$, $PN = 10$ cm, $\cos N = \frac{4}{5}$, calculați $MN$;
c. $\Delta COD$: $\sphericalangle O = 90°$, $CO = 15$ cm, $\operatorname{tg} D = \frac{5}{3}$, calculați $OD$.

**3.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 9$ cm și $AC = 6$ cm. Calculați $\sin B$, $\cos B$ și $\operatorname{tg} C$.

**4.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm și punctul $D$ este mijlocul laturii $BC$. Calculați: a) $\cos C$; b) $AD$; c) $\sin C$.

**5.** Folosind tabele trigonometrice sau un calculator științific, precizați valorile aproximative pentru: $\sin 25°$, $\cos 65°$, $\operatorname{tg} 40°$, $\operatorname{ctg} 50°$. Comparați rezultatele între voi. Explicați posibilele diferențe dintre rezultate!

**6.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 40°$ și $BC = 25$ cm. Calculați valorile aproximative ale lungimilor catetelor triunghiului (se vor folosi aproximările cu trei zecimale pentru sinus și cosinus de 40°).

**7.** Fiind dat un triunghi dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, exprimați sinusul, cosinusul și tangenta unghiurilor ascuțite în funcție de laturile triunghiului și demonstrați relațiile:
a) $\cos B = \sin C$; b) $\sin B = \cos C$;
c) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$; d) $\operatorname{ctg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$;
e) $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$; f) $\operatorname{ctg} B = \frac{\cos B}{\sin B}$.

# REZOLVAREA TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC

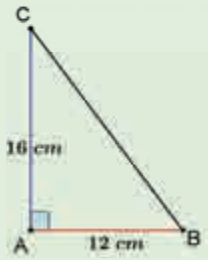
În clasa a VI-a ați învățat cazurile de construcție ale triunghiurilor oarecare și le-ați particularizat în cazul triunghiurilor dreptunghice. Faptul că un triunghi este *bine determinat* atunci când se poate construi cunoscând, de regulă, trei dintre elementele sale, v-a permis ulterior să folosiți aceleași combinații de elemente ale unui triunghi (LLL, LUL, ULU) pentru a demonstra congruența acestora. În situația particulară a triunghiului dreptunghic, numărul de elemente necesare în construcție/congruență (exceptând unghiul drept) scade la două – CC, CI, CU și IU.

Folosind, după caz, proprietăți ale triunghiului dreptunghic, precum și relații metrice (teorema catetei, teorema înălțimii și teorema lui Pitagora) și trigonometrice, putem determina elementele unui astfel de triunghi atunci când se *cunosc două* dintre ele (exceptând unghiul drept).

*A rezolva triunghiul dreptunghic înseamnă a determina măsurile unghiurilor/valorile trigonometrice ale unghiurilor și/sau lungimile laturilor sale atunci când se cunosc fie lungimile a două dintre laturi, fie măsura/o valoare trigonometrică a unui unghi ascuțit și lungimea uneia dintre laturi.*

**Cazurile CC și CI** (se cunosc lungimile a două dintre laturi):

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**




În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, lungimile catetelor sunt $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Calculați $BC$, $\sin B$ și $\operatorname{tg} C$.

*Rezolvare.*

În $\Delta ABC$ ($\sphericalangle A = 90°$), aplicând teorema lui Pitagora obținem $BC = 20$ cm;

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

**DESCOPERIȚI**

Discutați o strategie de lucru pentru determinarea catetei necunoscute și măsura unghiurilor ascuțite, sau una dintre valorile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite atunci când se cunosc lungimea *ipotenuzei* și lungimea uneia dintre *catete*.

**Cazul CU:**

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**




În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, lungimea catetei $AB$ este de 12 cm și $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$. Calculați lungimile celorlalte laturi și $\cos C$.

*Rezolvare.*

$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$, $\frac{AC}{12} = \frac{1}{2}$, deci $AC = 6$ cm.

Aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta ABC$ obținem $BC = 6\sqrt{5}$ cm; $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

**DESCOPERIȚI**

Dacă se cunosc sinusul unui unghi și lungimea *catetei opuse* acestuia, rezolvarea începe cu determinarea lungimii ipotenuzei. Găsiți o strategie de lucru pentru aflarea laturilor necunoscute atunci când se cunoaște sinusul unui unghi și lungimea *catetei alăturate*. Studiați și situațiile în care sunt cunoscute cosinusul unui unghi și lungimea uneia dintre catete.

## DESCOPERIȚI

La nivelul clasei, împărțiți-vă în trei grupe și discutați o strategie de calcul pentru determinarea catetelor unui triunghi dreptunghic când se cunoaște lungimea ipotenuzei și:
1. *măsura* unui unghi ascuțit;
2. *sinusul* unui unghi ascuțit;
3. *cosinusul* unui unghi ascuțit.

**Cazul IU:**

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$ se cunosc $\text{tg}\, B = \frac{2}{3}$ și $BC = 2\sqrt{13}$ cm. Calculați $AB$, $AC$ și $\sin C$.

*Rezolvare.*

$\text{tg}\, B = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AC = 2k, AB = 3k$ și, aplicând teorema lui Pitagora, obținem $4k^2 + 9k^2 = 52$, de unde obținem $k = 2$. Lungimile catetelor sunt: $AC = 4$ cm, $AB = 6$ cm și $\sin C = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

## OBSERVAȚIE

Determinarea elementelor *principale* ale unui triunghi dreptunghic (catete, ipotenuză, unghiuri) reprezintă un suport util în determinarea altor segmente specifice triunghiului – înălțime corespunzătoare ipotenuzei, mediane, linii mijlocii – precum și în calculul perimetrului sau ariei triunghiului.

## IMPORTANT

Deoarece $BD = AB \cdot \sin A$, putem afirma, mai general, că $A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2}$.

*Aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul a două laturi și valoarea sinusului unghiului dintre ele.*




## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

În triunghiul oarecare $ABC$, $AB = 12$ cm, $AC = 14$ cm și măsura unghiului $A$ este 30°. Calculați lungimea înălțimii $BD$, $D \in AC$ și aria triunghiului $ABC$.

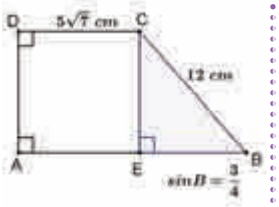
*Rezolvare.* În $\Delta ABD$, $\sphericalangle D = 90°$ și ipotenuza $AB = 12$ cm, se calculează $BD = 6$ cm;

$A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 42\ \text{cm}^2$.




## DESCOPERIȚI

În general, completarea unei figuri geometrice mai complexe cu elemente care formează triunghiuri dreptunghice și *rezolvarea unui triunghi dreptunghic* reprezintă etape ale unei strategii utile în determinarea lungimii unei înălțimi sau a altor elemente ale figurii, cu rezultat final calculul ariei (de exemplu).




Observați trapezul dreptunghic din figura alăturată și informațiile din desen. Elaborați, la nivelul clasei, o strategie de calcul a ariei trapezului $ABCD$, plecând de la *rezolvarea triunghiului dreptunghic* $BCE$.



## APLICAȚII: CALCULUL ELEMENTELOR ÎN POLIGOANE REGULATE (CU 3, 4 SAU 6 LATURI)

**DESCOPERIȚI**

Colaborați la nivelul clasei pentru a recapitula proprietățile poligoanelor regulate, noțiunea de apotemă, precum și despre punctele de intersecție ale liniilor importante din triunghi.

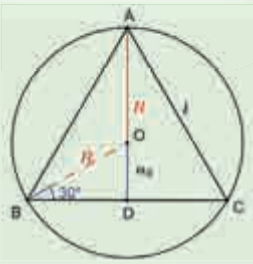
### Latura, apotema, raza și aria unui triunghi echilateral

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În triunghiul echilateral $ABC$, înscris în cercul de centru $O$ și rază $R$, notăm cu $a_3$ apotema triunghiului ($OD$).

În $\Delta OBD$, $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle OBD = 30°$:

- $\operatorname{tg} B = \frac{OD}{BD}$ și obținem $a_3 = \frac{l\sqrt{3}}{6}$;
- $\cos B = \frac{BD}{OB}$ și obținem $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$
- $AD = AO + OD$ (explicați!), deci înălțimea triunghiului este $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$;
- $A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$ și, folosind înălțimea calculată anterior, obținem: $A_{\Delta \text{ echilateral}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.




**OBSERVAȚIE**

$O$ este punctul de intersecție al tuturor liniilor importante în triunghi, deci el coincide cu *centrul de greutate, cu ortocentrul și cu centrul cercului înscris în triunghi. În consecință, $D$ este mijlocul laturii $BC$*, $BD = \frac{l}{2}$ și $BO$ este bisectoarea unghiului $ABC$, $\sphericalangle OBD = 30°$.

### Latura, apotema, raza și aria unui pătrat

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În pătratul $ABCD$, înscris în cercul de centru $O$ și rază $R$, notăm cu $a_4$ apotema pătratului ($OE$).

În $\Delta OAE$, $\sphericalangle E = 90°$:

- $OE = AE$, deci $a_4 = \frac{l}{2}$;
- $\cos A = \frac{AE}{OA}$ și obținem $R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$
- $A_{\text{pătrat}} = l^2$, $P_{\text{pătrat}} = 4 \cdot l$




**OBSERVAȚIE**

Punctul $O$ este punctul de intersecție al diagonalelor pătratului. Argumentați următoarele:

- $E$ – mijlocul lui $AB$
- $\sphericalangle OAE = 45°$

### Latura, apotema, raza și aria unui hexagon regulat

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

În hexagonul regulat $ABCDEF$, înscris în cercul de centru $O$ și rază $R$, notăm cu $a_6$ apotema hexagonului ($OM$).

În $\Delta OBC$, echilateral avem:

- $OM$ înălțime, deci $a_6 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$;
- $OB = BC$, deci $R = l$;
- $A_{\text{hexagon regulat}} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}$, $P_{\text{hexagon regulat}} = 6 \cdot l$.




**OBSERVAȚIE**

Punctul $O$ este centrul cercului circumscris hexagonului regulat. Argumentați următoarele:

- $M$ – mijlocul lui $BC$
- $\Delta OBC$ este echilateral

## EXERSAȚI

**1.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați $AC$, $\sin B$, $\cos B$ și $\operatorname{tg} C$.

**2.** Considerăm triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$. Calculați $AC$ și $BC$ știind că $AB = 8$ cm și:
a. $\operatorname{tg} B = \frac{5}{4}$; b. $\cos B = \frac{2}{5}$; c. $\sin B = \frac{1}{3}$.

**3.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$. Calculați $AB$ și $AC$, știind că $BC = 12\sqrt{2}$ cm și:
a. $\sin B = \frac{2}{3}$; b. $\cos B = \frac{1}{2}$; c. $\operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**4.** Într-un triunghi dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm. Construim mediana $AM$, $M \in BC$ și înălțimea $AD$, $D \in BC$. Calculați lungimile segmentelor $BC$, $AD$, $AM$, $BD$ și $MD$, precum și $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} C$ și $\operatorname{ctg} C$.

**5.** În triunghiul oarecare $ABC$, $\sphericalangle A = 45°$, $AB = 12$ cm și $AC = 10$ cm. Calculați lungimile înălțimilor corespunzătoare vârfurilor $B$ și $C$, precum și aria triunghiului.

**6.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 45°$ și lungimea înălțimii $AD$, $D \in BC$, este 24 cm. Calculați lungimile laturilor triunghiului.

**7.** În paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 10$ cm, $AD = 8$ cm și $\sphericalangle A = 30°$, se consideră înălțimea $DE \perp AB$, $E \in AB$. Calculați lungimea lui $DE$ și aria paralelogramului. Generalizați o formulă de calcul pentru aria unui paralelogram atunci când se cunosc lungimile laturilor și măsura unuia dintre unghiuri.

**8.** Calculați apotema și raza cercului circumscris unui triunghi echilateral cu latura de:
a. 12 cm; b. $5\sqrt{3}$ cm; c. $9\sqrt{2}$ cm.

**9.** Calculați latura și aria unui triunghi echilateral cu lungimea apotemei de:
a. 5 cm; b. $3\sqrt{3}$ cm; c. $5\sqrt{6}$ cm.

**10.** Calculați apotema și raza cercului circumscris unui pătrat cu latura de:
a. 8 cm; b. $5\sqrt{2}$ cm; c. $6\sqrt{3}$ cm.

**11.** Calculați perimetrul și aria unui pătrat cu lungimea apotemei de:
a. 4 cm; b. $3\sqrt{3}$ cm; c. $5\sqrt{7}$ dm.

**12.** Calculați apotema și raza cercului circumscris unui hexagon regulat cu latura de:
a. 14 cm; b. $6\sqrt{3}$ dm; c. $4\sqrt{2}$ m.

**13.** Calculați latura și aria unui hexagon regulat cu lungimea apotemei de:
a. 9 cm; b. $4\sqrt{3}$ m; c. $6\sqrt{2}$ dm.

**14.** Pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral $MNP$ sunt înscrise în cercul de centru $O$ și rază $R$. Știind că latura pătratului are lungimea de 8 cm, calculați lungimea laturii triunghiului echilateral și valoarea raportului dintre aria triunghiului și cea a pătratului.



**1.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC = 12$ cm și $\sphericalangle BAC = 120°$. Calculați lungimea laturii $BC$.

**2.** În patrulaterul $ABCD$, $AC \perp BD$. Dacă $AB = 7$ cm și $CD = 9$ cm, calculați $BC^2 + AD^2$.

**3.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Calculați lungimile medianelor triunghiului

**4.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AD$ este înălțime, $D \in BC$. Știind că $BC = 20$ cm și lungimea catetei $AB$ este 60% din lungimea ipotenuzei, calculați lungimile segmentelor $AC$ și $AD$, precum și lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

**5.** Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii cu cea mai mare lungime a triunghiului cu lungimile laturilor de 9 cm, $9\sqrt{2}$ cm și $9\sqrt{3}$ cm.

**6.** Considerăm un sistem de axe ortogonale $xOy$. Determinați coordonatele punctului $P$ dacă:
a. $OP = 6\sqrt{2}$ u și $\sphericalangle xOP = 45°$;
b. $OP = 8$ u și $\sphericalangle yOP = 60°$;
c. $OP = 10\sqrt{3}$ u și $\sphericalangle xOP = 120°$.

**7.** În rombul $ABCD$, $\sphericalangle ABC = 120°$ și $AB = 14$ cm. Calculați distanța de la $A$ la $BC$ și aria rombului.

**8.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, punctul $D$ este proiecția punctului $A$ pe $BC$, iar punctele $E$ și $F$ sunt proiecțiile punctului $D$ pe catetele $AB$, respectiv $AC$. Demonstrați că:
a. $AEDF$ este dreptunghi;
b. $AD^2 = AE^2 + AF^2$.

**9.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 105°$, $\sphericalangle B = 45°$ și $AC = 12$ cm. Calculați perimetrul și aria triunghiului.

**10.** Dreptunghiul $ABCD$ este astfel încât există un punct $E$, aparținând laturii $DC$, pentru care triunghiul $ABE$ este echilateral, iar $DE = 6$ cm. Punctele $M$ și $N$ sunt proiecțiile punctelor $D$, respectiv $B$ pe $AE$. Calculați:
a. $A_{ABCD}$; b. $MN$.

**11.** În dreptunghiul $ABCD$, $AB = 11$ cm și $CD = 6$ cm. Punctul $M$ aparține laturii $AD$, astfel încât $AM = 2 \cdot MD$, iar punctul $N$ este situat pe latura $AB$ astfel încât $AN = 3$ cm. Demonstrați că triunghiul $MNC$ este dreptunghic.

**12.** Punctele $M$ și $N$ sunt situate pe laturile $DC$ și $BC$ ale pătratului $ABCD$ astfel încât $DM = BN = \frac{1}{3}AB$. Știind că latura pătratului este egală cu 12 cm, calculați perimetrul și aria $\Delta AMN$.

**13.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, triunghiurile $ABD$ și $BCD$ sunt dreptunghice isoscele cu ipotenuzele $BD$, respectiv $CD$. Știind că $AD = 8$ cm, calculați aria trapezului.

**14.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 7\sqrt{5}$ cm, $BC = 5\sqrt{3}$ cm, $CD = 2\sqrt{5}$ cm și $DA = 5\sqrt{2}$ cm. Demonstrați că $AD \perp BC$ și calculați aria trapezului.

**15.** În patrulaterul $ABCD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90°$ și $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm și $CD = 10$ cm. Calculați $AD$.

**16.** Un pătrat și un hexagon regulat sunt înscrise în același cerc.
a. Calculați aria hexagonului, știind că latura pătratului este egală cu 6 cm.
b. Calculați aria pătratului, știind că latura hexagonului este egală cu 8 cm.
c. Calculați aria hexagonului, știind că aria pătratului este egală cu $81\text{cm}^2$.

**17.** Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt situate pe o dreaptă $d$, în această ordine, astfel încât $AB = 12$ cm și $BC = 8$ cm. De aceeași parte a dreptei $d$ se construiesc triunghiurile echilaterale $ABM$ și $BCN$.
a. Arătați că patrulaterul $ABNM$ este trapez și calculați-i aria.
b. Calculați lungimea segmentului $MN$.

## TESTUL 1

**Pentru cerințele exercițiilor 1-3 alegeți răspunsul corect. Pentru cerințele exercițiilor 4-6 completați cu răspunsul corect. Pentru problema 7 redactați etapele de rezolvare.**

**1.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 5$ cm și $AC = 10$ cm. Lungimea laturii $BC$ este egală cu:
a. 15 cm; b. $5\sqrt{3}$ cm; c. $5\sqrt{5}$ cm; d. $5\sqrt{6}$ cm.

**2.** În triunghiul $DEF$, $\sphericalangle D = 90°$, $DE = 3\sqrt{2}$ cm și $EF = 3\sqrt{6}$ cm. Lungimea laturii $DF$ este egală cu:
a. $6\sqrt{2}$ cm; b. $6\sqrt{3}$ cm; c. $3\sqrt{2}$ cm; d. 6 cm.

**3.** În triunghiul $MNP$, $\sphericalangle N = 90°$, $\sin P = 0,4$ și $MN = 7$ cm. Lungimea laturii $MP$ este egală cu:
a. 2,8 cm; b. 17,5 cm; c. 28 cm; d. 14 cm.

**4.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 60°$ și $AB = 8\sqrt{3}$ cm. Lungimea laturii $AC$ este egală cu ... cm.

**5.** În triunghiul $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $AC = 6$ cm și $CD = 9$ cm, atunci lungimea laturii $BC$ este egală cu ... cm.

**6.** Rezultatul calculului $(\sin 45°)^2 + \cos 60°$ este egal cu ... .

**7.** În dreptunghiul $ABCD$, $AB = 16\sqrt{2}$ cm, $BC = 8$ cm, punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $BC$, respectiv $CD$.
a. Demonstrați că $AM = 24$ cm.
b. Calculați perimetrul triunghiului $AMN$.
c. Demonstrați că $BD \perp AN$.

*Barem:* 1. *1p.* 2. *1p.* 3. *1p.* 4.*1p.* 5. *1p.* 6. *1p.*7. *3p. Oficiu 1p.*

## TESTUL 2

**1.** Pătratul $ABCD$, $AB = 8$ cm și triunghiul dreptunghic isoscel $BCE$, de ipotenuză $CE$, au latura comună $BC$.
a. Calculați perimetrul patrulaterului $AECD$.
b. Demonstrați că $DE = 8\sqrt{5}$ cm.
c. Dacă punctul $M$ este proiecția punctului $A$ pe dreapta $BD$, calculați valoarea raportului segmentelor $NE$ și $DN$.

**2.** În paralelogramul $ABCD$, $AB = 6$ cm, $AD = 4\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle BAD = 45°$. Punctele $E$ și $F$ sunt picioarele perpendicularelor construite din punctul $D$ pe $AB$, respectiv $BC$.
a. Demonstrați că $DE = 4$ cm.
b. Calculați lungimea diagonalei $BD$.
c. Demonstrați că $4 \cdot CF = 3 \cdot BC$.

**3.** Triunghiul echilateral $ABC$, de latură $6\sqrt{3}$ cm, este înscris în cercul de centru $O$ și rază $R$. Punctul $D$ este punctul diametral opus punctului $B$.
a. Demonstrați că $R = 6$ cm.
b. Calculați lungimea coardei $CD$.
c. Calculați valoarea raportului dintre aria triunghiului $ABC$ și aria triunghiului $DAC$.

*Barem:* 1. *3p.* 2. *3p.* 3. *3p. Oficiu 1p.*

# RECAPITULARE FINALĂ



**Algebra nu este decât o geometrie scrisă, geometria nu este decât o algebră figurată.**

**Sophie Germain**
**1776–1831**

# ALGEBRĂ

**1.** Calculați: $\sqrt{289}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$; $\sqrt{1024}$; $\sqrt{31,36}$; $\sqrt{51,84}$; $\sqrt{552,25}$.

**2.** Calculați cu două zecimale radicalii: $\sqrt{4,5}$; $\sqrt{17,23}$; $\sqrt{146,9}$.

**3.** Introduceți factorii sub radical: $2\sqrt{8}$; $5\sqrt{12}$; $4\sqrt{27}$; $18\sqrt{5}$; $-3\sqrt{17}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{48}$; $0,2\cdot\sqrt{150}$; $a\sqrt{13}$; $-a^2\sqrt{15}$.

**4.** Scoateți factorii de sub radical: $\sqrt{54}$; $3\sqrt{80}$; $5\sqrt{216}$; $3\sqrt{450}$; $\sqrt{24a^2}$; $\sqrt{25a^4}$; $5\sqrt{\frac{2^4 3^2 x^6}{25}}$; $\sqrt{18a^2b^6}$; $2\sqrt{\frac{125a^2}{4}}$.

**5.** Care este egalitatea falsă?
a) $\sqrt{12+3}=\sqrt{15}$; b) $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$; c) $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$; d) $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$.

**6.** Comparați numerele:
a) $\sqrt{15}$ cu $\sqrt{13}$; b) $-\sqrt{32}$ cu $-\sqrt{45}$; c) $5\sqrt{3}$ cu $3\sqrt{5}$;
d) $-12\sqrt{6}$ cu $6\sqrt{12}$; e) $5\sqrt{5}$ cu $2\sqrt{30}$.

**7.** Ordonați crescător numerele: $\sqrt{3}$; $-3\sqrt{2}$; $2\sqrt{6}$; $-4\sqrt{5}$; $-3\sqrt{7}$; $2\sqrt{11}$.

**8.** Raționalizați: $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\frac{2}{3\sqrt{6}}$; $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$; $\frac{18}{\sqrt{6}}$; $\frac{6}{5\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$; $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{225}}$.

**9.** Calculați:
a) $\sqrt{9}-2\cdot\sqrt{4}+3\cdot\sqrt{36}$;
b) $\sqrt{25}-3\cdot\sqrt{16}+2\cdot\sqrt{64}$;
c) $\sqrt{196}-4\cdot(\sqrt{144}-\sqrt{121})$;
d) $\sqrt{72}+\sqrt{128}-\sqrt{50}$;
e) $3\sqrt{5}+2\cdot(8\sqrt{5}-6\sqrt{5})-4\sqrt{5}$;
f) $2\sqrt{3}+3\cdot(7\sqrt{3}-5\sqrt{3})-6\sqrt{3}$;
g) $2(\sqrt{12}+\sqrt{98}-\sqrt{75}-\sqrt{32}):(\sqrt{8}-\sqrt{12})$;
h) $(\sqrt{48}+\sqrt{108}-\sqrt{192}):(\sqrt{12})$;
i) $(2\sqrt{6})^5\cdot(2\sqrt{6})^{-2}$;
j) $(\sqrt{10}\cdot\sqrt{30}:\sqrt{60})^2$;
k) $[(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{5}:3]:(\sqrt{10}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})$;
l) $\left(\frac{\sqrt{384}-\sqrt{150}}{\sqrt{128}-\sqrt{50}}\right)^2$;
m) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{25}{\sqrt{5}}-\frac{12\sqrt{5}}{5}\right)-\left(\frac{16}{3\sqrt{5}}-\frac{15}{\sqrt{45}}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$;
n) $\left(\frac{24}{6\sqrt{3}}-\frac{12}{4\sqrt{3}}-\frac{6}{2\sqrt{3}}+\frac{8}{2\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{34}{12\sqrt{2}}\right)$;
o) $5\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

**10.** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:
a) $x=3-2\sqrt{2}$ și $y=3+2\sqrt{2}$;
b) $x=27-12\sqrt{5}$ și $y=27+12\sqrt{5}$;
c) $x=3\sqrt{27}+5\sqrt{12}-9\sqrt{3}$ și $y=\sqrt{48}+2\sqrt{3}-\sqrt{75}$.

**11.** Fie numerele: $a=\sqrt{5,76\cdot 10^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și $b=3\cdot\sqrt{0,036\cdot 10^3}$. Aflați raportul dintre media geometrică și media aritmetică a numerelor $a$ și $b$.

**12.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $6\sqrt{6}-2\sqrt{54}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\notin\mathbb{Q}$; c) $\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; d) $\sqrt{12}\notin\mathbb{Q}$;

e) $1{,}45\in\mathbb{Q}$; f) $-\frac{2}{3}\in\mathbb{Z}$; g) $\sqrt{16}\in\mathbb{N}$; h) $-2^0\in\mathbb{Z}$;

i) $(-5)^{-1}\in\mathbb{Z}$; j) $\sqrt{1258}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; k) $\sqrt{13225}\in\mathbb{Q}$; l) $\sqrt{\frac{125}{5}}\in\mathbb{N}$;

m) $\pi\in\mathbb{Q}$; n) $\sqrt{2055}\in\mathbb{Q}$; o) $\sqrt{81}+\sqrt{2\frac{7}{9}}\in\mathbb{Q}$.

**13.** Stabiliți care dintre numerele reale $-2$; $\sqrt{5}$; $-1$; $\sqrt{27}$ și 6 verifică ecuațiile:

a) $4x-5=2(2x-3)+1$; b) $3x-\sqrt{45}=0$; c) $\frac{x+1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{x+1}{3}+\frac{2}{\sqrt{8}}$;

d) $4x-3\sqrt{3}+2=3x+2$; e) $3(x-1)+4=2(x+1)+5$.

**14.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $4x-5=2(2x-3)+1$; b) $3x-\sqrt{45}=0$; c) $\frac{x+1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{x+1}{3}+\frac{2}{\sqrt{8}}$;

d) $4x-3\sqrt{3}+2=3x+2$; e) $3(x-1)+4=2(x+1)+5$; f) $3x-2(4x-1)=12$;

g) $4(5x-2)+3=2(10x-1)$; h) $2(3x+5)-4=6(x+1)$; i) $7[1-3(2x-3)]=64-45x$;

j) $\frac{x+2}{4}-\frac{4x+1}{3}=\frac{2-7x}{6}$; k) $2\sqrt{3}\cdot(3x-1)+3x=x\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-2)$;

l) $2\sqrt{2}\cdot(x-\sqrt{2})+2x=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}x-6)-4$; m) $\frac{3x+4}{6x+5}=\frac{2x+3}{4x+3}$.

**15.** Care dintre perechile $(-5;\sqrt{5})$, $(\sqrt{2};3)$, $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-2;3)$ verifică sistemele de ecuații?

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=7\sqrt{3} \\ 3x-2y=7\sqrt{3} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=5 \\ 2x\sqrt{2}-3y=-5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y\sqrt{5}=0 \\ x\sqrt{5}+2y=-3\sqrt{5} \end{cases}$.

**16.** Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=7\sqrt{3} \\ 3x-2y=7\sqrt{3} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=5 \\ 2x\sqrt{2}-3y=-5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y\sqrt{5}=0 \\ x\sqrt{5}+2y=-3\sqrt{5} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 6(x+2y)=4(3y-2x)-14 \\ -4(x+y)=6-2(2x+5y) \end{cases}$; g) $\begin{cases} x+2[y-3(x-1)]=-2 \\ y-3[x-2(y+1)]=7 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} \frac{x}{6}+y=1+\frac{x+y}{4} \\ \frac{x}{8}-y-1=2-\frac{x-y}{5} \end{cases}$; i) $\begin{cases} \frac{1}{x}+10y=0 \\ \frac{5}{x}+49y=1 \end{cases}$.

**17.** Aflați un număr întreg, știind că prin calcularea a trei cincimi din număr obținem același rezultat ca atunci când scădem 20 din el.

**18.** Suma a cinci numere întregi consecutive este egală cu 0. Aflați numerele.

**19.** Peste 10 ani vârsta unei persoane va fi de două ori mai mare decât vârsta pe care a avut-o acum 5 ani. Ce vârstă are acea persoană în prezent?

**20.** Prețul unei biciclete se mărește cu 20%. După un timp, bicicleta se scumpește cu încă 10% din noul preț, ajungând astfel la prețul de 1188 lei.

a) Care a fost prețul inițial al bicicletei?

b) Cu ce procent din prețul inițial s-a mărit prețul bicicletei după cele două scumpiri?

**21.** La un test, fiecare elev a rezolvat toate cele 10 probleme propuse. Pentru fiecare problemă rezolvată corect s-au acordat 5 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greșit s-au scăzut 2 puncte. Aflați numărul de probleme rezolvate corect de un elev, știind că acesta a obținut 29 de puncte.

**22.** Într-un garaj se află 14 motociclete și autoturisme la un loc. O motocicletă are 2 roți și o mașină are 4 roți. Dacă numărul total de roți al motocicletelor și al autoturismelor este 48, aflați numărul motocicletelor și pe cel al autoturismelor.

**23.** Mai mulți copii vor să cumpere un obiect. Dacă fiecare participă cu câte 20 de lei, nu ajung 5 lei. Dacă fiecare participă cu câte 30 de lei, sunt în plus 25 de lei. Câți copii vor să cumpere obiectul? Câți lei costă obiectul?

**24.** Valoarea raportului a două numere naturale este egală cu 0,64. Media aritmetică a celor două numere este egală cu 61,5. Calculați cele două numere. Calculați media geometrică a celor două numere.

**25.** Aflați numărul a cărui medie aritmetică dintre jumătatea, treimea, pătrimea și șesimea sa este 15.

**26.** a) Aflați media aritmetică ponderată a numerelor 14, 32, 68 cu ponderile 3, 4, respectiv 2.

b) Aflați media aritmetică ponderată a numerelor 5, 2, 4, având ponderile respectiv 0,6; 0,9; 0,5.

**27.** Aflați două numere, știind că media lor aritmetică este egală cu 28, iar primul număr este egal cu triplul celui de-al doilea număr.

**28.** Cu cât crește media aritmetică a trei numere, dacă unul dintre ele se mărește cu 75?

**29.** Aflați numerele raționale pozitive $a$, $b$, $c$ știind că media geometrică a numerelor $a$ și $b$ este 5, media geometrică a numerelor $b$ și $c$ este 7 și media geometrică a numerelor $a$ și $c$ este 9.

**30.** Un elev are de citit o carte de 105 pagini în 5 zile. În prima zi citește un număr de pagini și apoi citește în fiecare zi un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. Câte pagini a citit elevul în prima zi?

**31.** Calculați $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$, știind că $A = \{a; b; c\}$ și $B = \{-3; -1; 0; 2\}$. Aflați cardinalul fiecărui produs cartezian găsit.

**32.** Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid 4x + 4 \leq 12\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}_-^* \mid 3x + 13 \geq 4\}$, calculați $A \cap B$ și produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.

**33.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(2; 0)$, $B(4; 3)$ și $C(-2; 0)$. Calculați aria și perimetrul triunghiului $ABC$.

**34.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $AB = 5$ cm, unde $A(4; 1)$ și $B(1; x)$.

**35.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(2; 3)$, $B(6; 3)$ și $C(3; 1)$. Calculați aria și perimetrul triunghiului $ABC$.

**36.** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(-2; 5)$, $B(2; 3)$, $C(2; -3)$, $D(-2; -5)$. Găsiți coordonatele mijloacelor $M$, $N$, $P$ și $Q$ ale segmentelor $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ și aria patrulaterului $MNPQ$.

**37.** Marius are următoarele note la matematică: 6, 5, 7, 4 și în teză 5. El vrea să-și mărească media cu un punct. Aflați a cincea notă pe care ar trebui să o primească. Care sunt variantele posibile?

**38.** Între mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x < 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$ se stabilește relația funcțională $y = x + 1$. Reprezentați relația printr-un tabel, grafic și printr-o diagramă.

**39.** Dați exemplu de o ecuație care să aibă mulțimea soluțiilor $S = \{-5; -1\}$.

**40.** Compuneți o problemă care să aibă drept soluție perechea ordonată de numere $(12; 18)$.

# GEOMETRIE

**1.** Doi pini cresc la o distanță de 20 m unul față de celălalt. Unul are înălțimea de 29 m, iar celălalt, mai tânăr, doar 14 m. Care este distanța dintre vârfurile lor?

**2.** Un triunghi dreptunghic isoscel $ABC$ are perimetrul egal cu $8(2+\sqrt{2})$ cm. Calculați înălțimea și mediana corespunzătoare ipotenuzei, precum și aria triunghiului.

**3.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AC = 2AB$, punctul $D$ este situat pe latura $AC$ astfel încât $\sphericalangle BDA = \sphericalangle ABC$. Demonstrați că $CD = 3AD$.

**4.** În interiorul pătratului $ABCD$, cu $AB = 18$ cm, se consideră punctul $M$ astfel încât triunghiul $CDM$ să fie echilateral.
a. Aflați perimetrul triunghiului CDM.
b. Calculați perimetrul poligonului concav $ABCMD$ și aria lui.
c. Calculați măsura unghiului $AMB$.
d. Demonstrați că triunghiul $MAB$ este isoscel și calculați aria lui.

**5.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle A = 90°$, punctul $M$ este proiecția punctului $A$ pe ipotenuza $BC$. Știind că $AM = 8$ cm, iar proiecțiile catetelor pe ipotenuză sunt proporționale cu numerele 2 și 8, calculați:
a. Aria și perimetrul triunghiului $ABC$.
b. Sinusurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului $ABC$.
c. Fie $O$ centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. Dreapta $AM$ intersectează a doua oară cercul în punctul $E$ și $D$ este punctul diametral opus lui $A$. Demonstrați că:
i punctul $B$ este mijlocul arcului mic de cerc $AE$;
ii. patrulaterul $BEDC$ este trapez isoscel.

**6.** În patrulaterul convex $ABCD$ avem $AB \perp AD, CD \perp BD$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BCD$. Demonstrați că $BD^2 = AB \cdot BC$.

**7.** O grădină în formă de paralelogram $ABCD$ are dimensiunile $AB = 16$ m, $AD = 8\sqrt{3}$ m, $\sphericalangle A = 60°$. Punctul $E$ aparține laturii $AD$ astfel încât $BE \perp AD$.
a. Calculați $BE$ și aria grădinii.
b. Arătați că sunt suficienți 60 m de gard pentru a împrejmui grădina.
c. Un iepuraș intră alergând în grădină prin punctul $E$ și străbate grădina, în linie dreaptă, ieșind prin punctul $C$. Calculați distanța parcursă de iepuraș, aproximând rezultatul la număr întregi de metri.



**8.** În triunghiul $ABC$, $AD$ este înălțime, $D \in BC$. Știind $AD = 6$ cm, $\sin C = \frac{3}{5}$ și $\operatorname{ctg} B = \frac{3}{4}$, calculați perimetrul triunghiului $ABC$. Verificați dacă triunghiul $ABC$ este dreptunghic.

**9.** În triunghiul dreptunghic $ABC$ cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC, D \in BC$, punctul $E$ este proiecția punctului $D$ pe $AC$, $AD = 2\sqrt{3}$ cm și $BD = 2$ cm. Calculați:
a. perimetrul triunghiului $CED$.
b. raportul ariilor triunghiurilor $DEC$ și $BAC$.
c. măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

**10.** În triunghiul $ABC$, lungimile laturilor sunt de 13 cm, 14 cm și 15 cm.
a. Aflați aria triunghiului $ABC$.
b. Verificați dacă relația $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$ este adevărată.

**11.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$ și cateta mai mică $AC = 4\sqrt{3}$ cm, unghiul dintre înălțimea $AD$ și mediana $AM$ are măsura de 30°. Calculați:
a. lungimile segmentelor $AD$, $AM$, $DC$ și $DB$.
b. aria și perimetrul triunghiului $ABC$.
c. raportul dintre ariile triunghiurilor $ADB$ și $ADC$.
d. ce procent din aria triunghiului $ABC$ reprezintă aria triunghiului $ADC$.
e. lungimea și aria cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**12.** În triunghiul $ABC$, din mijlocul $M$ al laturii $BC$ se construiesc perpendicularele $MP \perp AB$, $P \in AB$, $MQ \perp AC$, $Q \in AC$. Arătați că $MP \cdot AB = MQ \cdot AC$.

**13.** O paralelă la latura $BC$ a unui triunghi $ABC$ intersectează laturile $AB$ și $AC$ în punctele $D$, respectiv $E$, iar $BE \cap CD = \{F\}$. Arătați că $AF$ conține mijloacele segmentelor $DE$ și $BC$.

**14.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\sphericalangle A = 90°$, paralela construită prin punctul $O$ de intersecție al diagonalelor intersectează latura $AB$ în punctul $E$. Demonstrați că:
a. $\Delta AED \sim \Delta BEC$.
b. Semidreapta $EO$ este bisectoarea unghiului $DEC$.

**15.** În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$, iar $AM$ este mediană, $M \in BC$. Punctul $N$ aparține laturii $AB$ astfel încât $\frac{AN}{NB} = \frac{1}{2}$, iar punctul $P$ este mijlocul segmentului $CN$.
a. Demonstrați că triunghiul $NBC$ este isoscel.
b. Demonstrați că $NB = 2 \cdot PM$.
c. Demonstrați că $ANMP$ este romb.
d. Dacă $AC = 9$ cm, calculați $A_{\Delta ABC}$ și $A_{ANMP}$

**16.** În triunghiul isoscel $ABC$, $AB = AC$, punctul $M$ este mijlocul laturii $BC$, iar punctul $D$ este simetricul punctului $B$ față de punctul $A$. Punctul $P$ este intersecția lui $AC$ cu $MD$.
a. Demonstrați că $AM \parallel DC$.
b. Demonstrați că $CP = 2 \cdot AP$.
c. Dacă $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm, calculați:
   i. aria triunghiului $BCD$;
   ii. raportul dintre $A_{\Delta PMC}$ și $A_{\Delta ABC}$.

**17.** Considerăm trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 10$ cm, precum și $O$ punctul de intersecție al diagonalelor. În exteriorul trapezului construim triunghiurile echilaterale $ABE$ și $CDF$.
a. Demonstrați că $AO$ și $OC$ sunt proporționale cu $AE$ și $CF$.
b. Demonstrați că $\Delta AOE \sim \Delta COF$.
c. Demonstrați că punctele $E$, $O$ și $F$ sunt coliniare.

## TESTUL 1

**I. Pe foaia de testare scrieți doar rezultatele (30p)**

**1.** Rezultatul calculului $2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{27}$ este .....

**2.** Dintre numerele $a = 2\sqrt{5}$ și $b = 3\sqrt{2}$, mai mic este numărul .....

**3.** Un paralelogram *ABCD,* cu perimetrul egal cu 15 cm, are latura $AB = 3$ cm. Atunci $BC =$ ... cm.

**4.** Soluția sistemului $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$ este $x =$ ... și $y =$ ...

**5.** Înălțimea unui triunghi echilateral cu latura de $4\sqrt{3}$ cm este egală cu .....

**6.** În tabelul de mai jos sunt trecute notele obținute de toți elevii unei clase la un test.

| Nota | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. elevi | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 3 | 3 |

Numărul elevilor care au obținut cel puțin nota egală cu 7, este egal cu .....

**II. Pe foaia de testare scrieți rezolvările complete. (30p)**

**1.** Desenați pe foaia de testare un paralelogram *ABCD* cu $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm și $\sphericalangle DAB = 45°$.

**2.** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = \frac{\sqrt{13^2 - 5^2}}{\sqrt{10^2 - 8^2}}$ și $b = \sqrt{10^2 - 6^2}$.

**3.** Verificați că $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{4}{\sqrt{32}}$ este egal cu $2\sqrt{2}$.

**4.** Rezolvați ecuația: $|1 + 2x| = 7$.

**5.** Tatăl și fiul au împreună 40 de ani. Peste 4 ani, vârsta tatălui va fi de trei ori mai mare decât a băiatului. Aflați vârsta fiecăruia la momentul prezent.

**6.** Într-un sistem de axe ortogonale cu unitatea de 1 cm reprezentați punctele $A(-3; -7)$, $B(1; 1)$ și $C(4; 7)$. Calculați *AB*, *BC*, *AC* și stabiliți dacă punctele sunt coliniare.

**III. Pe foaia de testare scrieți rezolvările complete. (30p)**

Un trapez *ABCD* isoscel, cu $AB \parallel CD$, $AB = 14$ cm, $CD = 6$ cm are $\sphericalangle ABC = 60°$. Calculați:

a) Măsura unghiului *DCB*.

b) Perimetrul trapezului *ABCD*.

c) Aria triunghiului *MAB,* unde $AD \cap BC = \{M\}$.

d) Aria trapezului *ABCD*.

e) Lungimea diagonalei *BD*.

f) Lungimea înălțimii din *A* din triunghiul *MAB*.

*Barem: I. 6 x 5 p = 30 p; II. 6 x 5 p = 30 p; III. 30 p. Oficiu: 10 p.*

## TESTUL 2

**I. Pe foaia de testare scrieți doar rezultatele (30p)**

**1.** Rezultatul calculului: $\sqrt{12}+\sqrt{27}:\sqrt{9}-\sqrt{48}$ este egal cu ...

**2.** Un triunghi isoscel cu lungimile a două laturi de 8 cm și 4 cm are perimetrul egal cu ... cm.

**3.** Produsul cartezian $A \times B$ al mulțimilor $A=\{0;3\}$ și $B=\{-3;0\}$ este .....

**4.** Un romb $ABCD$ are perimetrul egal cu 40 cm și $\sphericalangle BAC = 30°$. Perimetrul triunghiului $ABD$ este...

**5.** Un triunghi $ABC$ are $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 7$ cm. Dacă $M$ este mijlocul laturii $AB$, iar $N$ este mijlocul laturii $AC$, atunci perimetrul triunghiului $AMN$ este egal cu ... cm.

**6.** În tabelul de mai jos sunt trecute temperaturile înregistrate pe parcursul unei săptămâni.

| Ziua | luni | marți | miercuri | joi | vineri | sâmbătă | duminică |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| temperatura | $3°C$ | $0°C$ | $-3°C$ | $5°C$ | $7°C$ | $0°C$ | $4°C$ |

Diferența dintre cea mai mare temperatură și cea mai mică temperatură este ... °.

**II. Pe foaia de testare scrieți rezolvările complete. (30p)**

**1.** Se consideră mulțimea $A=\left\{3\sqrt{2};\ -\frac{1}{7};\ -1,(3);\ \frac{12}{14};\ 0;|-3|;1,7;\pi;\ -1,325\right\}$. Determinați mulțimile: $A\cap\mathbb{N}$; $A\cap\mathbb{Z}$; $A\cap\mathbb{Q}$; $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

**2.** Se amestecă 5 kg de mere, având prețul de 3 lei kilogramul, cu 15 kg de mere având prețul de 5 lei kilogramul. Câți lei costă un kilogram de amestec?

**3.** Pe două rafturi se găsesc 140 de cărți. Pe al doilea raft sunt cu 50 de cărți mai multe decât jumătate din numărul cărților aflate pe primul raft.
a. Câte cărți sunt pe fiecare raft?
b. Cât la sută reprezintă numărul cărților aflate pe primul raft din numărul cărților aflate pe al doilea raft?

**4.** Calculați $\left(\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{\sqrt{90}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{\sqrt{110}}+\frac{\sqrt{12}-\sqrt{11}}{\sqrt{132}}\right):\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.

**5.** Determinați valorile întregi ale lui $n$ pentru care: $\frac{1}{2}\le\frac{(2n+1)^2}{24}\le\frac{4}{3}$.

**III. Pe foaia de testare scrieți rezolvările complete. (30p)**

**1.** Pe latura $AB$ a triunghiului $ABC$, cu $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm, $BC = 20$ cm, se consideră punctul $M$ care împarte latura în raportul $\frac{AM}{BM}=\frac{2}{3}$. Dacă $MN \parallel BC, N\in AC$ calculați:
a) $AM$; b) $MN$; c) $P_{BMNC}$.

**2.** Un paralelogram $ABCD$, cu $AC\perp BC$, are $\sphericalangle D = 60°$ și $AB = 10$ cm. Calculați:
a) $\sphericalangle DAB$; b) $P_{ABCD}$; c) înălțimea și mediana duse din $C$ în triunghiul $ABC$.

*Barem: I. 6 x 5 p = 30 p; II. 6 x 5 p = 30 p; III. 2 x 15 p = 30 p. Oficiu: 10 p.*

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## ALGEBRĂ

**Recapitulare clasa a VI-a**

Pg. 7–10. 1. 2; 2. $2^3 \cdot 3$; 3. 3; 4. $7 = 2 + 5$; 5. $\{0, 15, 30, 45\}$; 6. a; 7. b; 8. c; 9. 55; 2380; $3^{14}$; 2; 10. $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $B - C = \{0, 2\}$; $A \cap B \cap C = \{4\}$; $C \cap \mathbb{N} = C$; $(B \cup C) - A = \{5, 6, 7, 8\}$; 11. **a.** 36 și 72; **b.** 24 și 432; **c.** 36 și 1296; 12. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 5\}$, $A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$, $A \cap B = \{0\}$, $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$, $B - A = \{5\}$; 13. 3; 1; 14. 85; 15. 533; 16. 3; 17. 5; 18. $\frac{2}{5}$; 19. 1:200000; 20. A; F; 21. c; 22. a; 24. a; 25. 2 muncitori; 26. 144 saci; 27. 100 lei; 28. 396 lei; 29. 1; 30. 0; 32. $A = \{-3; -2; -1; 0\}$; 33. $-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6$; 34. 2; 35. $d < b < c < e < a$; 36. 0; 37. $A = \{-5; 5\}$; 38. $\frac{1}{2}$; 40. 16; −20; 0; 0; −9450; −1; 41. 56 ani; 42. $-9°C$; $-13°C$; 43. $15°C$; $-1°C$; 44. $A = \{-5; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 7\}$; $B = \{-6; -4; -3; -1; 0; 2\}$; 45. **a.** −12; 2; **b.** $\varnothing$; **c.** $(2, -7)$; 46. $\frac{99}{25}$; 47. $\frac{131}{33}$; 48. $\frac{119}{30}$; 49. 2,(43); 50. d; 51. 1; 5; 2; 3; 1; 1; 1; 3; 52. 3; 2; 6; 53. 1,25 km; 54. 70,05 lei; 55. 4,5; 2,25 și 3; 56. 1,81 m; 57. $a = b$; 58. $-1$; $\varnothing$; $-7{,}2$; 1; 59. $\frac{1}{25}$; 1; $\frac{1}{8}$; 60. **a.** 3; 4; **b.** −5; −4; −3; **c.** 5, 6, 7; **d.** −5; −4; −3; **e.** −11; −10; −9; −8; −7; −6; −5. Pg. 10–11. Test de autoevaluare: opuse la vârf; 360°; 180°; 90°; drepte paralele; mediatoarea segmentului; alterne interne, sau alterne externe, sau corespondente; obtuzunghic; în orice triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei. 1. 54°; 2. 144°; 3. 35°; 4. 132°; 5. 90°; 6. 45°; 7. 10 cm; 8. 20 cm; 9. 13 cm; 10. d; 11. c; 12. a; 13. c; 14. b; 16. 60°; 120°; 180°; 17. 12 cm; 12 cm; 36 cm; 18. 30°, 150°, 30°, 120°, 150°; 19. laturile sunt 4 cm, 4 cm, 1 cm; 20. ULU, IC, IU. Pg 12. I. 0; 1; 15 lei; 1; 180°; 15%. II. 25 lei; $\frac{7}{9}$; 6, 8, 10; 3; 4,75 și 0,25. III. **1.** Mediana este egală cu jumătate din ipotenuză; 24 cm. **2.** cazul de congruență IU.

**Capitolul 1**

Pg. 15. 3. 2; 6; 45; 5; 10. 4. **a.** 111; 11111; 111111111; **b.** 10001. 5. 2704; 2025; 4225; 1849. 6. 7; 8; 7; 2. 7. $x \in \{5, 6, 7, \ldots\}$; $x \in \mathbb{N}$; $x \in \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$; $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 8. $x = 1$, $y = 2$. 9. **a.** $a = 3$, $b = 6$; **b.** $a = 6$, $b = 9$; **c.** $a = 4$, $b = 1$; **d.** $a = 8$, $b = 9$. Pg. 19. 1. $2 < \sqrt{8} < 3$; $4 < \sqrt{17} < 5$; $5 < \sqrt{28} < 6$; $10 < \sqrt{101} < 11$; $13 < \sqrt{180} < 14$. 2. 29; 38; 46; 47; 5,4; 0,23; 8,7; 9,7; 1,07; 25,44; 3,001; 24,01. 3. $\frac{4}{3}$; 1,3; $\frac{7}{6}$; $\frac{37}{30}$. 4. 2,3; 0,31; 3,591. 5. **a.** $n \in \{8, 9, 10\}$; **b.** $n \in \{39, 40, 41\}$; **c.** 24; **d.** 61. 6. $-6xy$; $x^2y^3$; $-\frac{8}{5}xy^2$. Pg. 21. 1. $3\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$; $10\sqrt{3}$; $15\sqrt{2}$; $12\sqrt{7}$; $15\sqrt{6}$; $7\sqrt{6}$; $12\sqrt{5}$; $9\sqrt{10}$; $5\sqrt{10}$; $8\sqrt{37}$; $25\sqrt{6}$; $21\sqrt{3}$; $24\sqrt{5}$; $32\sqrt{3}$; $18\sqrt{7}$. 2. $15a^2\sqrt{2a}$; $4x^3\sqrt{5}$; $4xy^2\sqrt{2}$; $5a\sqrt{b}$; $6x^2y\sqrt{2xy}$; $x^3\sqrt{5}$. 3. $\sqrt{50}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{27}$; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{288}$; $-\sqrt{252}$; $-\sqrt{0{,}12}$; $\sqrt{4{,}5}$; $\sqrt{\frac{112}{3}}$; $\sqrt{112}$; $-\sqrt{23}$; $-\sqrt{1536}$; $\sqrt{9{,}8}$; $\sqrt{486}$; $-\sqrt{\frac{49}{3}}$; $-\sqrt{980}$. 4. $-\sqrt{x^2b^2}$; $\sqrt{5x^2}$; $\sqrt{15x^4}$; $\sqrt{75x^3}$; $-\sqrt{20x^5}$; $-\sqrt{1734x^2b^4}$. 5. a, a, a, f, a, f, f, f. 6. 9; 17; 27; 18; 7; −1; 10; 11; −1. 7. −2; 19; 27. Pg. 24. 1. 2,2; 2,6; 2,4; 2,8; 3,1; 3,6; 6,7; 9,7; 8,6; 6; 3,3; 4. 3. −4 și 0; 7 și 0; 6 și 0,25; −5 și $5 - 2\sqrt{5}$; 4. **a.** 0; 4; **b.** −3; 0; 4; **c.** −3; −2,16; −1,(6); 0; 2,(1); 4; 6,12; **d.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$. 5. 3; 5; 2; 23. 6. **a.** $5n + 1$ are ultima cifră 2 sau 7 și nu poate fi pătrat perfect; **b.** $6n - 4$ are ultima cifră 2 și nu poate fi pătrat perfect. 7. **a.** $\sqrt{1 + 3 + \ldots + 71} = \sqrt{36^2} = 36$. 8. Presupunem (prin reducere la absurd) că $\sqrt{p}$ este număr rațional. Atunci putem scrie: $\sqrt{p} = \frac{a}{b}, b \neq 0, (a, b) = 1$. Obținem $b\sqrt{p} = a \Leftrightarrow p \cdot b^2 = a^2$, adică $p$ divide $a$, $a = p \cdot x$. $p \cdot b^2 = p^2 \cdot x^2 \Leftrightarrow b^2 = p \cdot x^2$, adică $p$ divide și pe $b$. Am obținut $(a, b) = p$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Deci $\sqrt{p}$ nu este număr rațional. 10. Descompunem numărul natural $a$ în factori primi $a = p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdot p_3^{2n_3+1}$; $\sqrt{a} = \sqrt{p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdot p_3^{2n_3+1}} = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3}\sqrt{p_3}$ care este număr irațional. Pg. 26. 1. 15; 1,3; $2\sqrt{3}$; 2; $-7\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$. 2. f; a; f; a; f; **a.** 4. $\sqrt{5}$; $\sqrt{5} - 5$; 0. 5. **a.** $\{-16; 14\}$; **b.** $\{-2; 5\}$; **c.** $\{-1; 3\}$; **d.** $\mathbb{Z}$; **e.** $\{-1; 4\}$; **f.** $\varnothing$. 6. **a.** $\mathbb{Z}$; **b.** $\{\ldots, -9; -8; -7; 7; 8; 9 \ldots\}$; **c.** $\{-4; -3; \ldots -2; 3; 4\}$; **d.** $\{0\}$. 7. $\frac{9}{4}$; 0,22; $x^2$; 8. 8. a, f, f, a, a, f. 9. $\{-17; 17\}$. Pg. 29. 3. **a.** $\frac{7}{5} < \frac{7}{4}$; **b.** $3{,}1(24) < 3{,}12(4)$; **c.** $-\frac{8}{5} < -\frac{5}{8}$; **d.** $\sqrt{8} > -\sqrt{10}$; **e.** $\sqrt{28} < \sqrt{32}$; **f.** $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$; **g.** $-5\sqrt{3} > -4\sqrt{5}$. 4. **a.** $-2\sqrt{14} < -3\sqrt{6} < -4\sqrt{3} < 3\sqrt{5} < 7 < 5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$; **b.** $-14\sqrt{2} < -19 < -6\sqrt{10} < -10\sqrt{3} < 0 < 14 < 12\sqrt{3} < 15\sqrt{2}$; **c.** $-\sqrt{17} < -1{,}(2) < 3{,}(6) < 9\sqrt{2} < 7\sqrt{3}$. 5. **a.** $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$; **b.** $8\sqrt{2} - 5\sqrt{5}$; **c.** $6{,}(5) - \sqrt{39}$; **d.** $8\sqrt{15} + \sqrt{77}$; **e.** $\sqrt{12} + \sqrt{13}$; **g.** $7 - 2\sqrt{7}$; **h.** $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$. 7. **a.** $|2\sqrt{2} - 3| < |1 - 2\sqrt{2}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < |\sqrt{2} + 1| < \sqrt{8}$; **b.** $|2 - \sqrt{3}| < |2\sqrt{3} - 3| < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < |\sqrt{3} + 2| < \sqrt{27}$. 9. $2x - 2z$. Pg. 32. 1. $6\sqrt{0{,}1}$; $25\sqrt{2}$; 0; $-23\sqrt{2}$; $-7\sqrt{2}$; $14\sqrt{3} - 9\sqrt{2}$; $-2\sqrt{5}$; $-8\sqrt{6}$; $5\sqrt{0{,}1}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$;

$11\sqrt{6}+45\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-20\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}-5$; $2-\sqrt{3}$. **2.** $-6\sqrt{3}+10\sqrt{2}-4\sqrt{5}$; $4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$; $10\sqrt{3}+10\sqrt{5}$. **3. a.** $6\sqrt{2}-4\sqrt{5}+6\sqrt{7}$; 0. **Pg. 34. 1.** 0; 0; 0; 0; 0; 0; $3\sqrt{6}+2$; $3\sqrt{10}+6$; $-3\sqrt{21}-8$; $14\sqrt{15}+1$; $3-3\sqrt{30}$; $4-3\sqrt{15}$; $7\sqrt{2}$; $-2\sqrt{6}$; 99; $2\sqrt{6}-6$; $4\sqrt{15}+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-2\sqrt{10}+4\sqrt{2}+4\sqrt{5}-6$; $6\sqrt{10}-40$; $\frac{7\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}$; $\frac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$; $\frac{9-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$; $\frac{7\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}$. **3.** $S=10-6\sqrt{3}$, $P=-2$. **4.** 9; 39; 89; 159; 359; 1439. **Pg. 36. 1.** $-24\sqrt{3}$; $\frac{-1}{5\sqrt{5}}$; $-5488\sqrt{2}$; $\frac{1}{294}$; 1008; $\frac{1}{44}$; 2535; $\frac{1}{576}$; 1; $-102\sqrt{37}$. **2.** $4^{10}\cdot 5^5$; $-13^{10}$; 36; $8^{26}\cdot 26^{13}$; 64; 1; $15^4$; $(7\sqrt{10})^3$; $(3\sqrt{7})^{34}$; $6^{10}$; 8; 1; 1; $-14^4\sqrt{14}$; $8\sqrt{3}$; $\frac{1}{22^{10}\sqrt{22}}$; $-(6\sqrt{5})^{11}$; $-192$. **3.** $\frac{3}{2}$; 3; $5^5$; 0; 0; $\frac{25}{576}$; $-2$. **Pg. 37. 1.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}$; $3\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$; $3\sqrt{6}$; $\frac{8\sqrt{6}}{3}$; $4\sqrt{6}$; $3\sqrt{6}$; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$. **2.** $8\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$; $\frac{16\sqrt{3}}{15}$; $4\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{6}$. **3.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; $\frac{7\sqrt{3}}{3}$; $\frac{7\sqrt{6}}{6}$; $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\frac{11}{12}$; $\frac{6\sqrt{5}+35\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{10}$; $-2\sqrt{3}$; $\frac{4\sqrt{3}}{5}$; $\sqrt{5}$; $-\frac{23\sqrt{3}}{36}$; $\frac{17\sqrt{6}}{4}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\frac{21\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{12}$. **Pg. 40. 2.** 3,1. **4.** 1. **5.** $17\sqrt{2}$. **6.** 25. **7.** 39,5°. **8.** 40. **9.** $a\cdot b=6^{15}$. **Pg. 41. 2. a.** $-16$; 16; **b.** $\varnothing$; **c.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **d.** $\mathbb{R}$; **e.** $-4\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; **f.** $-4\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; **g.** $\varnothing$; **h.** $-4$; 4. **3. a.** $-40$; 40; **b.** $-40$; 32; **c.** $-\frac{7\sqrt{2}}{2}$; $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; **d.** $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$; **e.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **f.** $\varnothing$; **g.** $-2$; 2; **h.** $\varnothing$. **4.** da, $l=36$ cm. **5.** 2 m. **Pg. 42–43. 2.** 4,123; 5,012; 2,303; 11,180. **3.** $\sqrt{1620}$; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{153}$; $-\sqrt{12}$; $\sqrt{13a^2}$ dacă $a\geq 0$ și $-\sqrt{13a^2}$ dacă $a<0$; $-\sqrt{15a^4}$; $\sqrt{5a^4}$ dacă $a\geq 0$ și $-\sqrt{5a^4}$ dacă $a<0$; $\sqrt{60a^2}$ dacă $a\geq 0$ și $-\sqrt{60a^2}$ dacă $a<0$. **4.** $2|a|\sqrt{6}$; $5a\sqrt{a}, a\geq 0$; $3b\sqrt{2ab}, a\geq 0, b\geq 0$; $4a^2b^2\sqrt{3b}, b\geq 0$; $\frac{|a|\sqrt{5}}{2b\sqrt{b}}, b>0$; $\frac{25\cdot 7a^3\sqrt{a}}{4\sqrt{2}}$, $a\geq 0$; $\frac{25\cdot 6a^4\sqrt{30}}{7b^3}$, $a\geq 0, b>0$. **5.** $11<\sqrt{123}<12$; $-8<\sqrt{54}<-7$; $\sqrt{729}=27$. **7.** $4\sqrt{3}$; 40; $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{125}{27}$; $-5^5$; 80; $\frac{1}{121}$; $2^{12}$; $-40\sqrt{3}$; $5^4\cdot 2^2$; $3^8\cdot 10^4$; 3; $\frac{1}{20}$; $-36\sqrt{6}$; $12\sqrt{6}$. **8. d.** 9) $3\sqrt{7}$; $\frac{7\sqrt{3}}{2}$; $-8\sqrt{3}$; $\frac{-\sqrt{6}}{2}$; $\frac{5}{2}$. **10.** 2; 2001. **11.** $\frac{11\sqrt{5}}{12}$; $\frac{4\sqrt{6}}{3}$; 2; $4\sqrt{2}$; $5^5$; $6\sqrt{3}$; $\frac{17}{450}$; $\frac{14}{15}$; 1,8; 1. **12. a.** 4; 1; **b.** $3\sqrt{3}$; 5; **c.** $\sqrt{7}$; 2. **14.** $-6$ sau 6. **15.** (2; 5), (3; 6), (0; 9). **Pg. 44. TEST 1. I. 1.** $\sqrt{5}$; **2.** $\sqrt{63}$; **3.** $7\sqrt{2}$; **4.** $2\sqrt{3}$; **5.** $45\sqrt{10}$. **II. 1. b. 2. c. 3. b. 4. d. III. 1.** 1. **2.** 2; 1. **3.** 500. **TEST 2. I.** 1 cu $-15$; 2 cu 0; 3 cu 38; 4 cu 10; 5 cu 8; 6 cu $-1$; 7 cu $-4$; 7 cu $-2$. **II. 1.** 0; **2.** 8; 23; 80; **3.** 397,5; **4.** $\frac{4}{15}$.

## Capitolul 2

**Pg. 46. 2.** $-1$; $-1$; 0. **Pg. 50. 3.** 1. **4.** 4,6; $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{4}$; $9\sqrt{3}$; $\mathbb{R}$; $\sqrt{2}$; $\varnothing$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2; $-2$; $\frac{2}{3}$. **5.** $m=2-2\sqrt{5}$. **6.** 6,5. **7. a.** Pentru $m\neq 2\Rightarrow x=\frac{m-3}{m-2}$, pentru $m=2\Rightarrow x\in\varnothing$. **b.** Pentru $m\neq 4\Rightarrow x=3$, pentru $m=4\Rightarrow x\in\mathbb{R}$. **8. a.** $\{-6;\ -2;\ 2\}$; **b.** $\{2;10\}$; **c.** $\varnothing$; **d.** $\{-6;3\}$; **e.** $\{1\}$; **f.** $\{\frac{1}{2}\}$; **g.** $\{-1\}$; **h.** $\{9\}$. **9.** $m\in\{-9;\ -5;\ -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 3;\ 7\}$; **b.** $m\in\mathbb{Z}$. **Pg. 54. 1.** $(x_0;\ 3x_0+2)$. **2. a.** $-2$; **b.** $-4$. **4.** $(3\sqrt{2};\ 2\sqrt{3})$. **5.** (2; 3), (3; 3), $(-1;\ -2)$, $(-2; 4)$; $(\sqrt{5};\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};\ 2\sqrt{2})$; $(-1; 1)$; $(2;\ -2)$; $(1; 2)$; $(3; 1)$; $(1;\ -1)$. **Pg. 56. 1.** $(4\sqrt{2};\ -3)$; $(-1;\ -2)$; $(\sqrt{3};\ -1)$; $(2; 0)$; $(5; -1)$; $(1; 2)$; $(-12;\ -10)$; $(0; 0)$; $(1;\ -1)$; $(2; 5)$; $(1; 3)$; **l.** $(2; 2)$, $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(0; 0)$; **m.** sistemul nu are soluții; **n.** sistemul are o infinitate de soluții de forma $(x_0, 5x_0-8)$. **Pg. 59. 1.** 20 *l*/min, 100 *l*/min. **2.** 10. **3.** 100. **4.** 24 elevi. **5.** 1000 lei, 800 lei. **6.** 40 găini și 60 iepuri. **7.** 15 lei. **8.** 8; 40%. **9.** 14 ani, 8 ani. **10.** 6 camioane, 18 microbuze. **11.** 2; 13. **12.** 38. **13.** 25 pagini și 54 fotografii. **14.** 90 și 18. **15.** 5. **Pg. 60–61. 1. a.** $\sqrt{27}$; **b.** $-2$; **c.** 6. **2.** $-9$; 13; $\mathbb{R}$; 20; $-3$; 2; $\varnothing$; $-3$; 2; 1; 30. **3. a.** $(-2; 3)$; **b.** $(\sqrt{2};\ 3)$; **c.** $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$. **4. a.** $(1; 0)$; **b.** $(-2; 0)$; **c.** $(-2; 1)$; **d.** $(10; 5)$; **e.** $(2; 2)$; **f.** $(11; 6)$ **g.** $(2; 3)$, $(-2; 3)$, $(2;\ -3)$, $(-2;\ -3)$; **h.** $(5; 1)$, $(-5; 1)$, $(5;\ -1)$, $(-5;\ -1)$; **i.** $(-3;\ -2)$; j. $(0{,}5; 0{,}5)$; **k.** $(3; 5)$; **l.** $(1; 1)$. **5.** 1,5 kg. **6.** 3 cm, 4 cm, 5 cm. **7.** 17 cm și 17 cm sau 20 cm și 14 cm. **8.** 14 ani. **9.** 50°, 50° și 80° sau 80°, 80° și 20°. **10.** 88°, 92°, 88°, 92°. **11.** 2,5 l. **12.** 7 ani. **13.** 7. **14.** 250 km, 87,5 km, 32,5 km. **15.** Tata 33 morcovi, mama 28 morcovi și fiul 12. **16. a.** 50 și 50; **b.** 60 și 45. **17.** 150. **18.** 15 apartamente de 2 camere și 10 apartamente de 4 camere. **19.** 18 fete și 13 băieți. **Pg. 62. 1.** 4 și 8; $x$; $-2$. **2.** $-3$,2. **3.** 8. **4.** (2; $-3$). **5.** $-1$ sau 4. **6.** (3; $-2$); **7.** 145. **Test 1. 1.** $-4$; $-1$. **2.** (3; 5), (5; $-2$), (11; 6). **3.** 102 și 35. **4. a.** a treia zi; **b.** 3000 lei. **Test 2. 1.** 4,5. **2.** 12 dm și 9 dm. **3.** 43 sau 48 și 8 sau 9 zile. **4.** 40 bilete de 15 lei și 60 bilete de 20 lei. **5.** 36 și 25.

## Capitolul 3

**Pg. 67. 2.** $A\times B=\{(1;\ -2),(1;0),(5;\ -2),(5;0)\}$, $B\times A=\{(-2;1),(-2;5),(0;\ -2),(0;5)\}$, $A\times A=\{(1;1),(1;5),(5;1),(5;5)\}$, $B\times B=\{(-2;\ -2),(-2;5),(5;\ -2),(5;5)\}$, cardinalul lor este 4. **3.** $card(A\times B)=20$, $card(B\times A)=20$, $card(A\times A)=25$, $card(B\times B)=16$. **Pg. 71. 1.** $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{26}$ cm, 5 cm, $\sqrt{13}$ cm, 6 cm, 3 cm, 2 cm, $\sqrt{26}$ cm. **2.** $\sqrt{10}$cm, $\sqrt{26}$cm, $6\sqrt{2}$cm, $2\sqrt{26}$

cm, $3\sqrt{5}$cm, $\sqrt{34}$ cm, $\sqrt{34}$ cm, $2\sqrt{34}$ cm. 3. nu, nu, da. 4. $AB = BC$, $P = 2\sqrt{37} + \sqrt{74}$. 5. **a.** $\sphericalangle B = 90°$, $(0; 3)$, $(-0,5; 3,5)$, $(1,5; 5,5)$. **b.** $AC = BC$, $(1; 4)$, $(-0,5; 2)$, $(2,5; 2)$. 6. $(1; 7)$. 7. $\sphericalangle A = 90°$; 24 cm; 24 cm$^2$; 6 cm, 8 cm și 4,8 cm. 8. **b.** $3\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm. 9. $P = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{17}$. **Pg. 75–77.** 4. 70; 1. 5. 7,3°C, marți, duminică. 6. 32; 6; 19; 13; 6,84. 7. 5; 8; 30; 12,73; 30%. 8. 220; 250; crizanteme; frezii; 4340 lei. 9. 2,3 t; iulie, august, septembrie, octombrie; 1,2 t. 10. 13,45. **Pg. 78–79.** 1. $A \times B = \{(-2; -1), (-2; 1), (2; -1), (2; 1)\}$; $B \times A = \{(-1; -2), (1; -2), (-1; 2), (1; 2)\}$, $A \times A = \{(-2; -2), (-2; 2), (2; -2), (2; 2)\}$, $B \times B = \{(-1; -1), (-1; 1), (1; -1), (1; 1)\}$, cardinalul este 4. 2. cardinalul este 16. 5. nu, nu, da. 6. $AC = BC$, $\sphericalangle C = 90°$, $A = \frac{17}{2}$, $P = 4\sqrt{17}$. 7. $A = 25\sqrt{3}$, $P = 30$. 9. $\sqrt{34}$. **Pg. 80. TEST 2.** 1. $M(0,5; 1)$, $N(-3,5; 2,5)$, $P(0,5; -3)$. 2. 24 cm$^2$, 24 cm. 3. 60 lei, 24 lei, 76,50 lei, 42,50 lei, 80 lei; economisește 62 lei. **TEST 3.** 1. $B(2; -4)$, $C(-2; 4)$, $D(-2; -4)$. 2. $A = 18$, $P = 2\sqrt{13} + 2\sqrt{10} + 6$. 3. 21°,33°,31°.

# GEOMETRIE

**CAPITOLUL 4.**

**Pg. 85–86.** 1. *CDEF*, *DEFC*, *EFCD*, *DCFE*, *FCDE*. 5. **a)** 110°; **b)** 75°; **c)** 94°; **d)** 90°. 6. **c)** 7. **b)** $CD \parallel AB$ și secanta $BC$, $\sphericalangle C = 110°$; **c)** 90°. 8. Notând cu $A$, $B$, $C$, $D$ măsurile patrulaterului $ABCD$, $\frac{A}{8} = \frac{B}{9} = \frac{C}{11} = \frac{D}{12} = \frac{360°}{40}$, obținem $\sphericalangle A = 72°$, $\sphericalangle B = 81°$, $\sphericalangle C = 99°$, $\sphericalangle D = 108°$; dreptele $AB$ și $CD$, tăiate de secanta $AD$, formează unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare ($72°+108°= 180°$), deci sunt paralele. 9. **a)** *Măsurile sunt 72°* și 108°; **b)** $72°+108°= 180°$; **c)** Se procedează ca la problema anterioară. 10. **b)** $\sphericalangle P = 50°$, $\sphericalangle Q = 110°$; **c)** Fie $O$ mijlocul diagonalei $NQ$, $MO \perp NQ$, $PO \perp NQ$ (mediane în triunghiuri isoscele) și concluzia. 11. **a)** $\sphericalangle D = 360° - (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90°$; **b)** $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 80°$. 12. $\sphericalangle BCA = 60°$; se aplică proprietatea sumei măsurilor unghiurilor triunghiului $ABC$, $\sphericalangle ABC = 80°$; se calculează măsura unghiului $DAB$. **Pg. 91–92.** 1. 130°, 50°. 2. 70°, 110°. 3. Două laturi au 6 cm și celelalte două au 9 cm. 4. **a)** 60° și 120°; **b)** 72° și 108°; **c)** 80° și 100°. 5. $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EFG$. 8. $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° \Rightarrow \sphericalangle EAB + \sphericalangle EBA = 90°$ și concluzia. 9. Suma marginilor orizontale ale treptelor este egală cu $AB$, suma celorlalte margini este egală cu $BC$, lungimea covorului este 4,1 m. 10. **a)** Laturile opuse sunt paralele și congruente; **b)** Prea multe informații: ori doar paralele, ori doar congruente; **c)** Lipsește cuvântul opuse; **d)** Lipsește cuvântul opuse; **e)** Lipsește cuvântul oricare. 11. $AM = MB = AB:2 = DC:2 = DN = NC$, $AB \parallel DC$, deci $AM \parallel DN$, $AM \parallel NC$ și concluzia. 12. **a)** $AD + AM = BC + CN$, $MD \parallel BN$, deci $MBND$ este paralelogram; **b)** Se demonstrează că $MCNA$ este paralelogram. 13. Diagonalele $BD$ și $AC$ au același mijloc $M$. 14. Paralelogram, diagonalele se înjumătățesc, $OC = OD$ (raze) și $OA = OB$ (raze). 15. Dacă $O$ este intersecția diagonalelor, $OM - BM = ON - DN$ și $OA = OC$, diagonalele se înjumătățesc și concluzia. 16. **a)** $DC \parallel AB$ cu secanta $DE$, $\sphericalangle DEA \equiv \sphericalangle EAB$ și cum $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle DAE$, obținem $\sphericalangle DEA \equiv \sphericalangle DAE$, triunghi isoscel; **b)** $\Delta DAE \equiv \Delta BCF$ sau se demonstrează, ca la punctul anterior, că $FB \equiv BC$ și cum $BC \equiv AD$; obținem $FB \equiv BC \equiv AD \equiv DE$; **c)** Se dovedește că $AFCE$ este paralelogram. 17. **a)** $ED \parallel AB$ cu secanta $BC$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle EDC$ (unghiuri corespondente) și cum $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, obținem $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle ECD$, deci triunghiul este isoscel; **b)** Se aplică definiția; **c)** $FD = AE$ și $ED = EC$, deci $FD + DE = AC = 8$ cm; perimetrul este 16 cm. 18. Se demonstrează că $ABDE$ este paralelogram. **Pg. 96.** 1. **A.** i. b); ii. c); **B.** i. a); ii. c). 2. **a)** Laturile opuse celor două linii mijlocii au lungimile 6 cm și 8 cm; studiem două cazuri: cazul I în care P = 20 cm și cazul II în care P = 22 cm; **b)** Asemănător cu punctul anterior, dar, atenție, avem doar un caz (nu există triunghiul cu laturile 6, 6, 14). 3. **a)** 2 cm; **b)** 9 cm; **c)** 15 cm. 4. $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle DBF$ (paralelogram) și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (triunghi isoscel). 5. Mediana $DM = 6$ cm, $DG = 4$ cm. 6. Considerăm mijloacele laturilor $AB$ și $AC$ și aplicăm de două ori teorema liniei mijlocii în triunghi. 7. **a)** $MN$ linie mijlocie în triunghiul $BAC$; **b)** Se arată că $MN$ și $PQ$ sunt paralele și egale (cu linia mijlocie). 8. **a)** $AD \perp BC$ și $MN \parallel BC$; **b)** Aplicăm reciproca t.l.m. în triunghiul $ABD$. 9. **a)** Se demonstrează că $CDME$ este paralelogram; **b)** $MG = 6$ cm, $MO = 9$cm, $GO = 3$ cm. 10. $MO$ și $NO$ linii mijlocii în triunghiurile $BAD$ și $CAD$, și se aplică axioma paralelelor. 11. $EF$ linie mijlocie în triunghiul $PMN$ și $MN$ linie mijlocie în triunghiul $ABC$, deci $BC = 2MN = 4EF$. 12. Dacă $O$ este intersecția diagonalelor paralelogramului, $CO$ și $BE$ sunt mediane în triunghiul $CBD$, deci $P$ este centrul de greutate; $CO = 12 : 2 = 6$ cm, $CP = 2CO : 3 = 4$ cm. 13. **a)** $MN$ este linie mijlocie în triunghiul $BAP$; **b)** $MN \parallel AP \Rightarrow PQ \parallel MN$ și $P$ mijlocul lui $NC$, rezultă că $Q$ este mijlocul lui $MC$. **Pg. 100.** 2. da, da, da, da, nu, da, da. 3. da, da, nu, da, da, da, da. 4. **i.** b); **ii.** d). 5. **i.** b); **ii.** c). 6. Folosind proprietatea liniei mijlocii, $AMNP$ paralelogram și $\sphericalangle A = 90°$. 7. **a.** $MN$ linie mijlocie în $\Delta ABC$, $MN \parallel PQ$, $MP \parallel NQ$ (perpendiculare pe $BC$), deci $MNQP$ paralelogram; **b.** $MN = BC : 2 = 8$ cm, $NQ$ linie mijlocie în $\Delta CAD$, $NQ = AD : 2 = 5$ cm, $MN + NQ = 13$ cm. 8. **a.** Diagonalele $AD$ și $BC$ se înjumătățesc, deci $ABDC$ este paralelogram și $\sphericalangle A = 90°$, așadar este dreptunghi; **b.** $\sphericalangle ACB = 60°$, iar triunghiul $ACM$

este isoscel, deci echilateral; perimetrul este 12 cm. 9. **a.** $\sphericalangle BOC = 120°$ și triunghiul $OBC$ este isoscel, $\sphericalangle ACB = 30°$; **b.** se dovedește că triunghiul este echilateral, $AO = AC:2 = 9$ cm, P = 27 cm; **c.** $AO$ și $BM$ mediane, deci $P$ este centrul de greutate al triunghiului $ABD$, $AP = 6$ cm. 10. **a.** $\sphericalangle DAE = 45°$, $\sphericalangle ADE = 90°$, deci $\sphericalangle AED = 45°$, așadar $\Delta DAE$ este isoscel; **b.** $\sphericalangle DAC = 45°+15°= 60°$, $\sphericalangle DCA = 30°$, $AC = 2AD$ (teorema unghiului de 30°) și, cum $AD = DE =$ = 4 cm, obținem $AC$ = 8 cm. 11. **a.** $MD = 100$ m, $DN = 100$ m, $\sphericalangle D = 90°$, așadar $\Delta DMN$ dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle DNM = 45°$; la fel se obține că $\sphericalangle CNB = 45°$ și concluzia; **b.** $DP = 200$ m, $PC = 100$ m, $\Delta MDP \equiv \Delta PCB$ (CC), deci $MP = PB$ ($\Delta PMB$ isoscel) și $\sphericalangle MPD \equiv \sphericalangle PBC$; cum, în $\Delta CPB$, $\sphericalangle PBC + \sphericalangle BPC = 90°$, rezultă $\sphericalangle MPD + \sphericalangle BPC = 90°$, așadar $\sphericalangle MPB = 90°$. **Pg. 104–105.** 1. 70° și 110°. 2. Se formează un triunghi echilateral, 60°, 120°. 4. da, da, da, da, nu. 5. $MN + NO + OM = MQ + QO + MO$ și $NO = QO$, deci $MN = MQ$; paralelogramul este romb. 6. $AM = MD$ și $BM = MC$, deci $ABDC$ este paralelogram și, cum $AB = AC$, el este romb. 7. $BO = BA$ și $CO = CA$ (proprietatea punctelor de pe mediatoarea segmentului $OA$) și razele $OB = OC$, deci toate laturile sunt congruente. 8. **a.** $ABCD$, dreptunghi, $M$, $N$, $P$, $Q$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$; $MN$ și $PQ$ linii mijlocii în triunghiurile $BAC$ și $DAC$, deci sunt paralele și congruente, așadar $MNPQ$ paralelogram; diagonalele dreptunghiului sunt congruente, deci $MN = NP$ și obținem romb; **b.** Se arată la fel ca la **a.** că este paralelogram și laturile acestuia sunt paralele cu diagonalele rombului, care sunt perpendiculare, deci două laturi consecutive sunt perpendiculare. 9. **a.** Congruență de triunghiuri sau aplicăm proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi; **b.** $OM \perp AB$ și $AB \parallel CD$, deci $OM \perp CD$ și, cum $OP \perp CD$, rezultă că $P \in OM$. 10. Se demonstrează că $ABCD$ este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc) și diagonalele sunt perpendiculare. 13. Desenăm două diametre perpendiculare. 14. Centrul cercului este punctul de intersecție al diagonalelor și lungimea reazie este jumătate din lungimea diagonalei. 15. **a.** $\Delta ADE$ este dreptunghic isoscel, $\sphericalangle DAE = 45°$ și concluzia; **b.** $\sphericalangle A = \sphericalangle D = \sphericalangle F = 90°$, deci $ADEF$ este dreptunghi și diagonala $AE$ este bisectoarea unui unghi. 16. Se arată că $ABDC$ este romb și are unghi drept. 17. $AEDF$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi și diagonala $AE$ este bisectoarea unghiului $A$. 18. Se folosește proprietatea liniei mijlocii în triunghi. 19. **a.** Prin congruență de triunghiuri se arată că $MN = NP = PQ = QM$; $\sphericalangle AMQ \equiv \sphericalangle BNM$, $\sphericalangle BMN + \sphericalangle BNM = 90°$, deci $\sphericalangle BMN + \sphericalangle AMQ = 90°$, adică $\sphericalangle QMN = 90°$ *și am* obținut un romb cu un unghi drept, deci pătrat. **b.** Diagonalele pătratului (rombului) sunt perpendiculare. 20. **a.** $\Delta BMC \equiv \Delta DMC$ ; **b.** $\Delta MDA \equiv \Delta MBA$; **c.** $AN \equiv CM \Rightarrow ON = OM$, $OB = OD$ și $BD \perp MN$ ($AC$) și concluzia. 21. **a.** Folosim secanta $CD$ și unghiurile corespondente cu măsurile de 45° formate; **b.** $DF \perp GE$ și $GE \parallel AC$, deci $DF \perp AC$; dar $DB \perp AC$, deci $DF$ și $DB$ coincid; **c.** $\Delta FAB \equiv \Delta FCB$. 22. **a.** i) $\Delta ADE \equiv \Delta BCE$ și concluzia; ii) $\Delta ADE$ isoscel, $\sphericalangle DAE = 90°-60°= 30°$ și concluzia; **b.** Triunghiul $EDC$ iscoscel, $\sphericalangle EDC = 90°-75°= 15°$ și concluzia. 23. **a.** Triunghiul $ADE$ este isoscel, $\sphericalangle DAE = 45°$, deci $\sphericalangle ADE = 67°30'$; **b.** $\sphericalangle CDE = 90°-67°30' = 22°30' = 45°: 2 = \sphericalangle BDC:2$; **c.** $EDB$ este isoscel, deci $\sphericalangle EDB = 22°30' = \sphericalangle EBD$ și $\sphericalangle BED = 135°$. 24. **a.** $\sphericalangle ECG = 45°+45°= 90°$; **b.** $\sphericalangle EFB = \sphericalangle EFD + 45°$, așadar trebuie ca $\sphericalangle EFD = 45°$, deci triunghiul dreptunghic $DEF$ trebuie să fie isoscel și $D$ mijlocul lui $CF$; $AC = CB : 2$, deci $C$ este la o treime de $A$ pe $AB$. 25. **a., b.** congruență de triunghiuri; **c.** din **b.** și $\sphericalangle ADM + AMD = 90°$. **Pg. 110–111.** 3. **i.** c); **ii.** b); **iii.** d). 4. **a.**10 cm, 2 cm; **b.** 6 cm, 4 cm; **c.** 8 cm, 22 cm; **d.** 12 cm, 14 cm. 5. **a.** $MN = 12$ cm (linie mijlocie triunghi), $PQ = 18$ cm (linie mijlocie trapez); **b.** $(AC + AC : 2) : 2 = 15$ cm, deci $AC = 20$ cm. 6. **a.** $BCD = 140°$, $ADC = 130°$; **b.** $AECD$ este paralelogram, $ECD = 50°$, deci $ECB = 90°$; **c.** Se demonstrează că $PM$ și $PN$ sunt paralele cu $AB$; $MP = CD = b$, $PN = EB : 2 = (B - b) : 2$ și $MN = MP + PN$. 7. $M, N \in DC$, $DC \parallel AB$, deci $MN \parallel AB$ și $MN < AB$, așadar $ABNM$ este trapez; $\Delta ADM \equiv \Delta BCN$, $AM = BN$ deci este isoscel. 8. Construim înălțimea $PR$, $R \in MN$, $MRPQ$ dreptunghi, $MR = 5$ cm, $RN = 7$ cm; **a.** $\Delta RNP$ dreptunghic isoscel, $PR = RN = 7$ cm, $MQ = 7$ cm; **b.** În triunghiul dreptunghic $RNP$, $\sphericalangle P = 30°$, $PN = 2RN = 14$ cm. 9. **a.** $\sphericalangle DAC = 30°$, în triunghiul dreptunghic $ADC$, $AC = 2DC = 10$ cm, $AB = 10$ cm; **b.** $AE$ mediană în triunghi echilateral, este și bisectoare și înălțime, $\sphericalangle CAE = 30°$; $\sphericalangle DCB = 120°$, $\sphericalangle DCA = 60°$, $\sphericalangle FCA = 30°$, $\sphericalangle FCA = \sphericalangle CAE$ unghiuri alterne interne (cu secanta $AC$), deci $FC \parallel AE$; $\sphericalangle AEC = 90°$ și concluzia. 10. $AB$ linie mijlocie în $OEF$, $AB \parallel EF$, $DC \parallel AB$, deci $DC \parallel EF$ ($DC < EF$), $EFCD$ trapez; $\Delta DOE \equiv \Delta COF$ (sau $\Delta DAE \equiv \Delta CBF$), obținem $DE = CF$, deci este isoscel. 11. **a.** 70°, 110°; **b.** 130°, 50°; **c.** 60°, 120°; 70°, 110°. 12. Se demonstrează că $BECD$ este paralelogram, $CE = BD = AC$, deci $CAE$ este isoscel. 13. **a.** $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle EAB$ și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$, deci $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ABC$ unghiuri alterne interne (secanta $AB$), așadar $AE \parallel BC$; **b.** $EA \equiv AD \equiv BC$, $AEBC$ este paralelogram, deci $BE \parallel AC$. 14. $CE = AD = CB$, așadar triunghiul $CEB$ este isoscel, $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle CBE$, și cum $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$ , obținem $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle A$ unghiuri corespondente congruente (secanta $AB$), deci $CE \parallel AD$ și concluzia. 15. **a.** $MN$ linie mijlocie, $MN \parallel BC$ și $BM = CN$ (jumătăți de laturi congruente); **b.** $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle C$ (secantele $AB$ și $AC$), și cum $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, obținem $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N$, deci triunghiul $AMN$ este isoscel, $AM = AN$, deci $BM = CN$; **c.** Triunghiurile $ABC$ și $AMN$ isoscele: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = (180°-\sphericalangle A) : 2$, $\sphericalangle M = \sphericalangle N = (180°-\sphericalangle A) : 2$, deci $\sphericalangle B = \sphericalangle M$ unghiuri corespondente congruente cu secanta $AB$, așadar $MN \parallel BC$. 16. **a.** $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle AOC = 180°$, $\sphericalangle BOC = 90°$, deci $\sphericalangle BOD = 180°$; **b.** $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DCO = 45°$

alterne interne cu secanta $AC$, așadar $AB \parallel CD$; **c.** de la **b.** $ABCD$ este trapez, $\Delta BOC \equiv \Delta AOD$, deci $BC = AD$, trapez isoscel. 17. $EF$ linie mijlocie, $EF \parallel DM$ și, prin calcul, se arată că $EF = DM$. 18. **a.** $\Delta DAB \equiv \Delta CBA$, deci $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB$, triunghiul $OAB$ isoscel; pentru triunghiul $OCD$ se arată că $OC \equiv OD$ (prin scădere de segmente congruente); **b.** cazul LLL sau LUL. 19. **a.** Se demonstrează că $AECD$ este romb, $CE = 4 = CB$, deci triunghiul $CEB$ este isoscel și are un unghi de 60°, așadar este echilateral; **b.** $AE = 4$, $EB = 4$, $AB = 8$ cm; **c.** $BAC = 60° : 2 = 30°$, $ABC = 60°$, deci $ACB = 90°$. 20. **a.** $DM$ mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghi dreptunghic, $DM = AB : 2$, iar $NP$ linie mijlocie a triunghiului $ABC$, $NP = AB : 2$; **b.** $MP$ linie mijlocie în triunghiul $ABC$, $MP \parallel BC$ deci $MP \parallel ND$ și concluzia. Pg. 116–117. 1. **a.** $P = 40$ cm, $A = 96$ cm$^2$; **b.** $P = 32$ cm, $A = 64$ cm$^2$; **c.** $l = 10$ cm, $P = 40$ cm, $A = 96$ cm$^2$. 2. 2 laturi au 6 cm și celelalte două au 9 cm 3. a-4, b-1, c-2, d-3. 4. 36cm$^2$. 5. A = 64, $L = 4l$, $4l \cdot l = 64$, deci $l = 4$, $L = 16$ și P = 40cm. 8. **a.** 60 cm$^2$; **b.** 27 cm$^2$ ; **c.** 24 cm$^2$; **d.** 34 cm$^2$. 9. **a.** $A_{ABCD} = AB \cdot DE = 36$ cm$^2$; **b.** $A_{ABCD} = BC \cdot DF$, $36 = 6DF$, $DF = 6$ cm. 10. Aplicăm teorema unghiului de 30°, aflăm înălțimea din $D$ corespunzătoare lui $AB$, $h = 3$ cm, $A_{ABCD} = 24$ cm$^2$. 11. Se demonstrează că $BD \perp AD$, deci $BD$ înălțime, $A = 36$ cm$^2$. 12. **a.** $A_{ABC} = 36$ cm$^2$; **b.** $CE = 7{,}2$ cm. 13. **a.** $A_{ABC} = 48$ cm$^2$; **b.** h=9,6 cm. 14. **a.** Aplicăm teorema lui Pitagora; **b.** $A_{\Delta ABC} = 30$ cm$^2$; **c.** $AD = \frac{60}{13}$ cm$^2$. 15. Aplicăm teorema unghiului de 30°, $h$ = 2cm, $A$ = 7 cm2. 16. Înălțimea corespunzătoare vârfului $A$ din cele două triunghiuri este aceeași, și $BM = CM$. 17. Teorema unghiului de 30°, $h$ = 6cm, $A$ = 72cm2. 18. $A_{ABCD} = 50$ cm$^2$, $A_{BEC} = 10$ cm$^2$, 25%. 19. $h = 4$ cm, $A_{ABCD} = 40$ cm$^2$. 20. Teorema unghiului de 30°, $h = 2\sqrt{3}$ cm, $A_{ABCD} = 16\sqrt{3}$ cm$^2$. 21. Teorema unghiului de 30°, $BC = 10$ cm, $A_{ABCD} = \frac{95\sqrt{3}}{2}$ cm$^2$ . Pg. 118–119. 1. Se obțin două unghiuri drepte. 3. **a.** Se folosește proprietatea sumei măsurilor unghiurilor în patrulater; **b.** $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CDE = 72°$, $\Delta ADE$ isoscel și concluzia; **c.** Se demonstrează că $DC \parallel EB$ (secanta $BC$) și $DE \parallel BC$ (secanta $EB$). 4. 54 plăci. 5. **a.** 24 cm; **b.** 20 cm; **c.** 3 cm; **d.** 16 cm. 6. 12 cm. 7. Se demonstrează că paralelogramul are două unghiuri consecutive congruente. 8. Se demonstrează că două laturi consecutive sunt congruente. 9. Se folosește faptul că $AM$ este linie mijlocie în $\Delta BCP$ și $\Delta CBN$. 10. Se demonstrează că $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle AMN$ și concluzia. 11. **a.** Se demonstrează că $AMON$ este dreptunghi, deci diagonalele $MN$ și $AO$ sunt congruente; **b.** Dacă $P$ este intersecția diagonalelor, triunghiul $POM$ este isoscel, $PMO = POM = MOB$, unghiuri alterne interne cu secanta $OM$, deci $MN \parallel BC$. 12. $\Delta DAM \equiv \Delta BCN$(IU), deci $AM \equiv NC$; $DM \parallel BN$ (sunt perpendiculare pe drepte paralele), $MB \parallel DN$ și $\sphericalangle M = 90°$, deci $DMBN$ dreptunghi. 13. **a.** $\sphericalangle AEO \equiv \sphericalangle AOE$ (complementele unghiurilor $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle CBE$); **b.** Se demonstrează că $\Delta AEO \equiv \Delta MEO$ și concluzia. 14. $\sphericalangle MBE \equiv \sphericalangle BAD$ (suplementele unghiului $ABC$), $\Delta BAD \equiv \Delta MBE$ (LUL) și concluzia. 15. **a.** $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle AMD$; **b.** $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA = 90°$; $AD = DM$ și $MC = CB$, $P = 48$ cm. 16. Bisectoarele oricăror două unghiuri consecutive ale unui paralelogram sunt perpendiculare și concluzia. 17. Se demonstrează că $DM = AD = AN$ și concluzia. 18. **a.** $\Delta BAE \equiv \Delta CAN$; **b.** Dacă $BE \cap CN = \{O\}$, se studiază unghiurile din patrulaterul $MBON$; **c.** Se demonstrează că $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle AEQ$ și concluzia 19. Se demonstrează că sunt toate pe linia mijlocie a trapezului. 20. **a.** Diagonalele se înjumătățesc; **b.** $ANCF$ paralelogram și concluzia; **c.** $MA \parallel BC$, $AN \parallel BC$ și concluzia. 21. Dacă $E$ este mijlocul laturii $AB$ și $F$ este mijlocul laturii $CD$, se demonstrează că $M, E, O$ sunt coliniare, $E, O, F$ sunt coliniare și $O, F, N$ sunt coliniare. 22. **a.** Se poate demonstra congruența laturilor opuse (congruențe de triunghiuri) sau faptul că diagonalele se înjumătățesc; **b.** Se demonstrează că $DMBN$ este paralelogram; **c.** Punctul $E$ este centrul de greutate al triunghiului $ABD$, deci $DM$ este mediană. 23. $A_{AMND} = 60$ cm$^2$, $A_{\Delta NMB} = 48$ cm$^2$. Pg. 120. TEST 1. 1. congruente și perpendiculare. 2. trapez. 3. dreptunghi sau pătrat. 4. romb sau pătrat. 5. dreptunghic. 6. linie mijlocie în trapez. 7. paralelogram. 8. isoscel. 9. mijlocul. 10. jumătate din suma lungimilor bazelor. 11. pătrat. 12. congruente. 13. suplementare. 14. jumătate din lungimea laturii pe care nu o intersectează. 15. pătrat. 16. dreptunghi. 17. pătrat. 18. pătrat. TEST 2. 1. **a.** Se verifică definiția; **b.** Ambele unghiuri sunt suplementele unor unghiuri congruente ale paralelogramului $APMN$; **c.** $APMN$ devine romb și concluzia; **d.** Se demonstrează că $PM = PB$ și se obține $P_{APMN} = 30$ cm. 2. **a.** Se demonstrează că diagonalele se înjumătățesc; **b.** În $\Delta ABD$, $AB + BD > AD$ și, cum $BD = AC$ și $AD = 2AN$ , se obține concluzia. 3. $FE \parallel DC$ (linie mijlocie în $\Delta MDC$) și se demonstrează că $DM = MC$ și concluzia; **b.** $FE \parallel DC \parallel AB$ și se demonstrează că $AF = BE$; **c.** Se demonstrează că $AF$, respectiv $BE$ intersectează $Cd$ în mijlocul acesteia.

**CAPITOLUL 5.**

Pg. 124–125. 1. echilateral. 2. pătrat. 3. $d(O, AB) = d(O, CD) \Rightarrow AB \equiv CD$ deci $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$. 4. **a.** În triunghiul isoscel $OBC$ se obține că $\sphericalangle BOC = 40°$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 40°$; **b.** Dacă punctele $C$ și $D$ sunt de o parte și de alta a diametrului $AB$. 5. Dacă construim diametrul perpendicular pe coarda $AD$ și $M$ este intersecția lor, $M$ este și mijlocul lui $BC$ și al lui

$AD$. **6.** $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB \equiv CD$, $d(O,AB) = d(O,EF) \Rightarrow AB \equiv EF$ și concluzia. **7. a.** Congruență de triunghiuri sau $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD \Rightarrow AC \equiv BD \Rightarrow AC \equiv BD$, se demonstrează la fel că $AD \equiv BC$, deci și distanțele de la centru la cele două coarde sunt egale; **b.** Dacă $\sphericalangle AOD = 60°$; **c.** Diagonalele se înjumătățesc și sunt congruente, deci $ACDB$ este dreptunghi; dacă diametrele sunt perpendiculare, devine pătrat. **8. a.** 60°, 60°; **b.** Este triunghiul isoscel și are un unghi cu măsura de 60°; **c.** $AD \equiv \overset{\frown}{BE} \Rightarrow AD \equiv BE \Rightarrow$distanțe egale; **d.** Se demonstrează că $DE \parallel AB$ (unghiuri alterne interne congruente cu secanta $OD$) și că $AD = BE$, $P = 20$ cm. **9.** Desenăm diametrul care trec prin $A$ și o coardă perpendiculară pe acesta. **10.** Intersecția mediatoarelor celor două coarde este centrul cercului; dacă cele două coarde sunt paralele și $M$ și $N$ sunt punctele de intersecție ale mediatoarei comune a lor cu cercul, atunci $MN$ este diametru. **11. a. b.** Se aplică proprietatea diametrului perpendicular pe coardă; **c.** Dacă $CD$ este diametru. **12. a.** Se demonstrează că $AC \equiv BD$, deci $d(O,BD) = d(O,AC) = 3$ cm; **b.** Se demonstrează că $\sphericalangle OCA = 30°$, $\sphericalangle DOA = 60°$, deci $\Delta ODA$ este echilateral, $AD = 6$ cm; **c.** Se aplică proprietatea liniei mijlocii în triunghi. **13. a.** $AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{BC} \equiv AD \Rightarrow AD = 55°$; **b.** $\sphericalangle COD = 150°$. **14. a.** Coardele sunt paralele și se aplică teorema 3; **b.** Se demnstrează că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOC$. **Pg. 128. 1. a.** $\sphericalangle BCD$ sau $\sphericalangle BED$; **b.** $\overset{\frown}{CE}$; $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle CDE$. **2.** Arcele $AM$ și $CM$ sunt congruente, deci și coardele corespunzătoare sunt congruente. **3. a.** Ambele unghiuri au măsura de 70° sau 110°; **b.** Unul dintre unghiuri are măsura de 70° și celălalt 110°. **4.** 160°, 40°, 120°. **5.** $\sphericalangle BAD = 100°$, $\sphericalangle ABC = 125°$, $\sphericalangle BCD = 80°$, $\sphericalangle CDA = 55°$. **6.** Dacă notăm cu $x$ măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$, obținem $x + 2x + 2x - 40° = 360°$, $x = 80°$, $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 80°$ și $\sphericalangle C = 20°$. **7. a.** $O$ este în interiorul triunghiului, deci în interiorul unghiului $ABC$ și obținem concluzia; **b.** $AC = 130°$, $\overset{\frown}{ABC} = 230°$, $\sphericalangle ADC = 115°$. **8.** $\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$. **9.** $AD = \overset{\frown}{BC} = 80°$, $BD = AC = 100°$. **10.** 60°, 130°, 170° și 30°. **11.** 70°, 50° și 200°. **12.** Dacă notăm cu $2a$, $2b$, $2c$ și $2d$ măsurile celor patru arce de cerc, se calculează măsurile unghiurilor $MPN$ și $PNQ$ și se obține concluzia. **13.** $\sphericalangle BDC = \overset{\frown}{BC} : 2$, $\sphericalangle DBE = DE : 2$ și concluzia. **14.** Se procedează ca la problema anterioară și se obține $\sphericalangle BAC = (\overset{\frown}{BC} + DE) : 2$. **Pg. 130–131 1. a.** O infinitate de cercuri, toate cu centrul pe bisectoarea unghiului; **b.** Centrul cercului este, pe bisectoarea unghiului, la distanța de 8 cm de față de $A$. **2. a.** $AB = 12$ cm, $BC = 13$ cm, $AC = 15$ cm, $P = 40$ cm; **b.** $BM = 4$ cm, $CN = 8$ cm, $AP = 6$ cm; **c.** 6 cm. **3.** $IM \perp BC$ și, dacă punctele $A$, $I$ și $M$ sunt coliniare, atunci $AI$ este înălțime a triunghiului; cum $AI$ este și bisectoarea unghiului, obținem concluzia. **4.** $BM = BN$, $CP = CA$, deci obținem $BM = CP$ și, cum $AM = AN$, prin adunarea ultimelor două egalități obținem $AB = AC$. **5.** Se demonstrează că triunghiul $DAC$ este isoscel și are un unghi cu măsura de 60°, deci este echilateral, de unde se obține concluzia. **6.** $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAO - \sphericalangle BAO = 90° - 40° = 50°$. **7.** Se procedează ca la problema anterioară. **8.** Se demonstrează că este dreptunghi și are două laturi consecutive congruente. **9. a.** $a \perp AB$, $b \perp AB$, deci $a \parallel b$; **b.** trapez dreptunghic sau dreptunghi; **c.** $\sphericalangle OMN = \sphericalangle AMN : 2$, $\sphericalangle ONM = \sphericalangle BNM : 2$, unghiurile $AMN$ și $BNM$ sunt suplementare și se obține concluzia. **Pg. 134–135. 1. a.** romb; **b.** dreptunghi. **2.** Triunghiul $ABC$ obținut este echilateral. **3. a.** 108°; **b.** 135°; **c.** 150°; **d.** 156°. **4. a.** 9; **b.** 16; **c.** 24; **d.** 30. **6.** 400. **7.** Cercul înscris are același centru cu poligonul și raza egală cu apotema poligonului. **8. a.** Laturile sunte egale cu raza; **b.** $BC \parallel AO$ (din punctul anterior), deci $BC \parallel AD$ și $BC < AD$, așadar este trapez și $AB \equiv CD$; **c.** $\sphericalangle ACD = \overset{\frown}{AFD} : 2 = 90°$; **d.** $AB \parallel DE$ și $AB \equiv DE$, deci $ABDE$ este paralelogram; unghiul drept se demonstrează ca la punctul anterior. **Pg. 137. 1. a.** $10\pi$ cm, $25\pi$ cm$^2$; **b.** $16\pi$ cm, $64\pi$ cm$^2$; **c.** $5\pi$ dm, $6{,}25\pi$ dm$^2$. **2. a.** 25,1 cm; 50,2 cm$^2$; **b.** 43,9 cm, 153,8 cm$^2$; **c.** 21,9 dm, 38,4 dm$^2$. **3. a.** 9 cm; **b.** 10,4 dm; 3,8 m. **4.** Diametrul este aproximativ egal cu $75{,}4 : 3{,}14$, deci raza este aproximativ 12 m. **5.** $L_{cerc} \simeq 50{,}24$ cm, 20 de cercuri necesită aproximativ 1004,8 cm, deci citca 10,05 m; achiziționăm 11 m de sârmă. **6. a.** 9 cm; **b.** 11 cm; 0,7 dm. **7.** Lungimea arcului de cerc reprezintă un sfert din lungimea cercului. **8.** $900\pi$ cm$^2$, $r = 30$ cm, $L_{cerc} = 60\pi$ cm, $L_{arc} = 10\pi$ cm. **9.** $115\pi$ cm$^2$. **10.** Aria sfertului de disc este aproximativ 113,04 cm$^2$, deci aria suprafeței hașurate se exprimă ca diferență de arii și este aproximativ 30,96 cm$^2$. **11.** $OE = 8$ cm, $A_{disc} = 64\pi$ cm$^2$, $A_{pierdută} \simeq 55{,}04$ cm$^2$, iar 22% din suprafața pătratului reprezintă 56,32 cm$^2$. **12.** $L_{cerc} = 70\pi$cm $\simeq 2{,}198$ m, 200 rotații înseamnă $\simeq$439,6, deci aproximativ 440 metri. **Pg. 138–139. 1.** $OM \perp BC$, $ON \perp DE$, $\sphericalangle MAN = 90°$, deci $OMAN$ este dreptunghi și concluzia. **2.** $AB \equiv AC$, deci triunghiul este isoscel. $\sphericalangle ABC = 120° : 2 = 60°$, deci triunghiul este echilateral. **3.** În triunghiul dreptunghic $ODM$, $OM = \frac{1}{2} OD$, deci $\sphericalangle ODM = 30°$, $\sphericalangle DOC = 120°$; arcele $AD$ și $AC$ sunt congruente și obținem $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOC = 120°$, deci $\Delta ADC$ este echilateral. **4.** Dacă $OB \perp MN$, obținem $MB \equiv NB$, deci arcele $AB$ și $CB$ sunt congruente, de unde concluzia. **5.** Dacă $AO \perp MN$, atunci $A$ este mijlocul arcului $MN$, deci $MA \equiv NA$, de unde concluzia. **6.** Dacă notăm cu $E$ și $F$ proiecțiile lui $O$ pe coarde, se demonstrează că $OEMF$

este pătrat. 7. Trapez isoscel sau pătrat. 8. $\widehat{MAN} = 2b + 2c = 180° - 48° = 132°$, $\sphericalangle MAN = 114$. 9. $D$ este mijlocul arcului $BC$, raza $OD$ intersectează $\widehat{BC}$ în mijlocul acestuia, deci este perpendiculară pe coardă. 10. **a.** $AB = AC = (360° - 140°) : 2 = 110°$, $AN = 55°$; **b.** $\sphericalangle MPN = 55°$; **c.** $\sphericalangle MPN = (\widehat{AB} + \widehat{AC}) : 4 = (360° - 140°) : 4 = 55°$. 11. **b.** Se pot desena o infinitate de cercuri, centrele lor se află pe o dreaptă $c$, paralelă cu cele două drepte, situată la mijlocul distanței dintre ele; **c.** Desenăm un cerc cu centrul în $A$, de rază 3 cm, acesta intersectează dreapta $c$ în două puncte; cercurile cu centrele în aceste puncte, de rază 3 cm, sunt cercurile căutate, deci sunt 2 cercuri. 12. **a.** Raza $OM$ este perpendiculară și pe coardă și pe tangentă; **b.** Raza $OM$, fiind perpendiculară pe tangentă, devine perpendiculară și pe coardă, deci intersectează arcul în mijloc. 13. Se demonstrează că $\sphericalangle ACB = 60°$, și cum $CA = CB$, obținem că $\Delta ABC$ este echilateral. 14. Triunghiurile $ADI$, $BEF$ și $CGH$ sunt echilaterale, laturile hexagonului au toate lungimea egală cu o treime din lungimea laturii triunghiului; se demonstrează și congruența unghiurilor. 15. romb sau pătrat. 16. Se folosește proprietatea liniei mijlocii în triunghi. 17. **a.** Dacă $M$ este punctul de tangență al ccercului de centru $G$ cu latura $AB$, $AEGM$ și $MGFB$ sunt dreptunghiuri, $\sphericalangle EGF = 180°$; **b.** Diametrul cercului de centru $G$ este egal cu $BC$ deci 10 cm, $EF = r + 2r + r = 20$ cm; **c.** $AECF$ paralelogram, $EG = GF$, deci diagonalele $AC$ și $EF$ se intersectează în $G$; **d.** Suprafața cu flori este formată din două discuri, $A_{flori} = 50\pi \simeq 157\ m^2$, $A_{rămasă} = 200 - 50\pi \simeq 43\ m^2$. **Pg. 140. TEST 1. 1. a.** 170; **b.** 230; **c.** 65; **d.** 60; **e.** $BD \equiv DC$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$, de unde concluzia. 2. **a.** $\Delta ODA$ este echilateral, $DA = OA = AB$, deci $\Delta ODB$ este dreptunghic, $OD \perp BD$; **b.** Se demonstrează analog că și $BE$ este tangentă la cerc, deci $BE = BD$ și $\sphericalangle EDB = 60°$. 3. **a.** Se demonstrează că $OMCN$ este pătrat și $N$ este mijlocul segmentului $BC$; **b.** $A_{ABCD} = 600\ m^2$, $A_{disc} = 100\pi \simeq 314\ m^2$, $A_{gazon} \simeq 286\ m^2$. **TEST 2. 1. i.** b; **ii.** d; **iii.** a; **iv. c.** 2. $\sphericalangle AMB = \widehat{ADB} : 2 = 135°$; $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DMB = \sphericalangle CMB = 45°$. 3. **a.** Diagonalele se înjumătățesc, deci este paralelogram, $AM = MB$, diagonalele sunt egale, $\sphericalangle AMB = 90°$, diagonalele sunt perpendiculare, deci este pătrat; **b.** $L_{contur} = L_{semicerc} + AD + DC + CB$, $L_{contur} = (10\pi + 60)$ m; **c.** $A_{totală} = A_{semidisc} + A_{ABCD} = (50\pi + 400)\ m^2$.

**CAPITOLUL 6**

**Pg. 144. 1.** $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 1$; $D$ este mijlocul segmentului $AB$. 2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$. 3. $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{15}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2}$. 4. $\frac{0,4}{0,3}$ dacă folosim dm, $\frac{40}{30}$ dacă folosim mm. 5. $\frac{4}{11}, \frac{7}{8}, \frac{4}{3}, \frac{11}{15}, \frac{1}{5}$. 6. $AM = 6$ cm, $MB = 14$ cm, $\frac{3}{10}, \frac{10}{7}, \frac{17}{13}$. 7. $A$ este între $M$ și $B$; $AM = 3p$, $BM = 7p$, $AB = 4p$, $p = 5$ cm, $AM = 15$ cm, $MB = 35$ cm, $\frac{3}{4}, \frac{4}{7}$. 8. $\frac{AC}{CB} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{4}$, $AC = 4$ km, $CB = 16$ km. 9. $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 8$ cm , $AD = 18$ cm. 10. $AM = \frac{2}{7}AB = NB$. 11. $AM = MN = NP = PQ = QB = a$, se aplică teorema paralelelor echidistante și se obține $AD = DE = EF = FG = GB = b$; se exprimă segmentele în funcție de $a$ și $b$ și se obține concluzia. **Pg. 147–148. 1. a.** 6 cm, 7,2 cm, 4,8 cm; **b.** 8 cm, 1,6 cm, 6,4 cm; **c.** 10 cm, 37,5 cm, 22,5 cm; **d.** 10 cm, 15 cm, 6 cm. 2. **a.** 3 cm, 4 cm, 15 cm; **b.** 4,5 cm, 15 cm, 13,5 cm; **c.** 6 cm, 22 cm, 33 cm; **d.** 15 cm, 15 cm, 7 cm. 3. **a.** 7 cm, 8 cm, 8 cm; **b.** 6,4 cm, 16,8 cm, 25,2 cm; **c.** $6\sqrt{7}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm, $16\sqrt{2}$ cm. 4. **a.** 4 cm, 8 cm, 3 cm, 6 cm, 6 cm, 12 cm; **b.** 2,1 cm, 4,2 cm, 0,7 cm, 1,4 cm, 2,1 cm, 3,5 cm; **c.** $5\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $10\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm, $20\sqrt{5}$ cm. 5. **a.** $\frac{3}{8}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}$; **b.** 9 cm, 12 cm, 12 cm, 28 cm; **c.** 10 cm, 6 cm, 8,4 cm. 6. 4 cm, 3 cm, 3 cm, 6 cm, $EF = GC = 3$ cm, $FH = AE = 6$ cm. 7. Se demonstrează că $\frac{DM}{DB} = \frac{DN}{DC}$. 8. **a.** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC}$ și concluzia; **b.** $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ și concluzia. 9. Teorema lui Thales, aplicată în $\Delta OAB$ cu $DC \parallel AB$, respectiv în $\Delta EAB$ cu $DC \parallel AB$. 10. **a.** 6 cm, 9 cm; **b.** $\frac{DM}{MA} = \frac{DN}{NB} = \frac{CP}{PB}$ și concluzia. 11. **a.** $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$; **b.** $BD = 4,5$ cm, $DC = 7,5$ cm. **Pg. 152. 1.** da, nu, da, da, nu, da. 2. da, da, da, nu. 3. $NC = 15$ cm, $\frac{AN}{NC} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{AM}{MB}$ și concluzia. 4. $\frac{AO}{OC} = 3 = \frac{DO}{BO}$, $AD \parallel BC$. 5. $\frac{CE}{BC} = \frac{3}{7} = \frac{AD}{AB}$ și concluzia. 6. $\frac{MB}{BN} = \frac{MA}{AP} = \frac{MC}{CQ}$ și concluzia. 7. $\frac{CO}{OD} = \frac{AO}{OB} = \frac{EO}{OF}$ și concluzia. 8. $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OA} = \frac{r}{R}$ și concluzia. 9. Se demonstrează că $OB = OC$ și, cum $OM = ON$ (raze), se obține $\frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OC}$ și concluzia. 10. Se aplică reciproca teoremei lui Thales. 11. **a.** $BM = MC = 8$ cm, $\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{5}{4}$ (teorema bisectoarei); **b.** și **c.** se demonstrează că $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. **Pg. 156. 2.** 64°, 35°, 81°. 3. Se obțin laturile $MP = 7,5$ cm, $MN = 15$ cm și $P = 32,5$cm. 4. Unghiurile sunt congruente și laturile sunt prporționale. 5. **a.** isoscel; **b.** echialteral. 6. $\sphericalangle C = 30°$ și $\sphericalangle D = 90°$, deci unghiurile corespunzătoare sunt congruente; aplicând teorema unghiului de 30°, $AB = 2$ cm și $EF = 14$ cm, și se verifică proporționalitatea

laturilor. 7. 30 cm, 60 cm. 8. **a.** 4 cm, 6 cm; **b.** 15 cm, 7,5 cm; **c.** 15 cm, 12 cm. 9. **a.** 8 cm, 20 cm; **b.** 6 cm, 10,5 cm. 10. $\frac{BM}{BC}=\frac{2}{7}=\frac{MN}{BC}$, $BC = 21$ cm.11. **a.** Se aplică reciproca teoremei lui Thales; **b.** $BC = 16$ cm. 12. **a.** $\Delta AOB \sim \Delta COD$, se scriu rapoartele și se obține concluzia; **b.** $BO = 3DO$, $4DO = 16$, $DO = 4$ cm, $BO = 12$ cm. 13. Aplicând T.F.A. în $\Delta MAB$, $DC \parallel AB$ obținem $\frac{MD}{MA}=\frac{MC}{MB}=\frac{DC}{AB}$, de unde $\frac{MD}{MD+4,6}=\frac{3}{9}\Leftrightarrow 3MD = MD + 4,6$, deci $MD = 2,3$ cm; analog $MC = 2,5$ cm; $P_{MDC}$ = 7,8 cm, $P_{ABC} = 23,4$ cm. 14. $AM \cap DE = \{N\}$, $\Delta ADN \sim \Delta ABM$ și $\Delta AEN \sim \Delta ACM$, și se obține concluzia. 15. $O_2B \parallel O_1A$, $\Delta CO_2B \sim \Delta CO_1A$, se obține $CO_1=\frac{R(R+r)}{R-r}$. 16. Aplicăm T.F.A. în triunghiurile $MAB$ și $MAC$ și obținem $\frac{ME}{MB}=\frac{MD}{MA}=\frac{MF}{MC}$, $MB = MC$, deci $EM \equiv FM$; $\frac{DE}{AB}=\frac{MD}{MA}=\frac{DF}{AC}$ și aplicăm proporții derivate.

Pg. 161. 2. NU, asemănarea este $\Delta ABC \sim \Delta MPN$. 3. Se folosește cazul UU. 4. Se folosește cazul UU; afirmația nu este adevărată! 5. **a.** Cazul LUL; **b.** rezultă din asemănarea triunghiurilor; **c.** $DE = 16,5$ cm. 6. $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BAC = 36°$, $\sphericalangle C$ comun, se aplică cazul UU. 7. se demonstrează că $\Delta DAB$ este isoscel și $\sphericalangle B$ este unghi comun; cazul UU. 8. $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ și obținem relația din rapoartele de asemănare. 9. **a.** Cazul UU; **b.** Se obține din rapoartele de asempnare. 10. **a.** $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CDB$(subîntind același arc de cerc), cazul UU; **b.** se obține din rapoartele de asemănare. 11. **a.** ambele triunghiuri sunt asemenea cu $\Delta AMN$sau cazul UU; **b.** $\Delta MDC \sim \Delta MAN$, $\frac{MD}{MA}=\frac{MC}{MN}$, analog $\frac{NB}{NA}=\frac{NC}{NM}$ și concluzia. 12. **a.** cazul UU; **b.** Se obține din rapoartele de asemănare. 13. Ambele relații se obțin din asemănarea $\Delta CAA' \sim \Delta CBB'$(UU). 14.$\Delta MDC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{MD}{MN}=\frac{DC}{NP}$, $\Delta MDF \sim \Delta MNE \Rightarrow \frac{MD}{MN}=\frac{MF}{ME}$, deci $\frac{MF}{ME}=\frac{DC}{NP}\Leftrightarrow\frac{10-l}{10}=\frac{l}{15}$, așadar latura pătratului este 6 cm. 15.$P_{\Delta DEF} = 161$ cm. 16. a. 16 cm, 18 cm; **b.** 24,5 cm; **c.** 0,25 sau 4. 17.$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{4}$, $\frac{P_{\Delta AMN}}{30}=\frac{1}{4}$, $P_{\Delta AMN} = 7,5$ cm; raportul ariilor este $\frac{1}{16}$ sau 16. 18. **a.** raportul ariilor este $3^2$, $A_{\Delta MNP} = 225:9 = 25$ cm$^2$; **b.** $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta MNP}}=\frac{225}{900}=\frac{1}{4}$ deci raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$sau 2. 19. Se demonstrează analog cu ultima problemă rezolvată. 20. Se demonstrează analog cu ultima problemă rezolvată. 21.$A_{ABCD} = 72$ cm$^2$, $A_{\Delta EAB} = A_{\Delta EDC} + A_{ABCD}$, $\Delta EDC \sim \Delta EAB$, $\frac{A_{\Delta EDC}}{A_{\Delta EAB}}=\frac{1}{4}$ și obținem $A_{\Delta EDC} = 24$ cm$^2$.Pg. 162–163. 2. 148 cm; $\frac{10}{37},\frac{12}{37},\frac{15}{37}$. 3. a. 160 km, 120 km; **b.** $\frac{4}{3}$, 280 km. 5. **a.** 2 cm, $\frac{16}{3}$cm, $\frac{8}{3}$cm; **b.** 5,2 cm, 10,4 cm, 19 cm; **c.** $4\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{6}$ cm, $12\sqrt{6}$ cm. 6. A, F, A, **A.** 7. **a.** 10; **b.** 5; **c.** 2. 10. $P_{\Delta ABC} = 63$ cm, $P_{\Delta AEF} = 12,6$, $\frac{1}{5}$ sau 5, $\frac{1}{25}$ sau 25. 11. $\frac{BN}{NC}=\frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PD}$ și concluzia. 12. b. cazul UU; **c.** 12,8 cm, 6,25 cm. 13. $\Delta ABC \sim \Delta BDA$ și se obține concluzia. 14. cazul LLL, raportul ariilor este $\frac{1}{4}$ sau 4. 15. Se aplică succesiv teorema lui Thales: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}=\frac{BG}{BA}$ și concluzia. 16. 4 cm, 4 cm, 4 cm, 6 cm, 6 cm, 6 cm, 8 cm, 4 cm. 17. $\frac{CE}{CA}=\frac{EO}{a}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{EO}{b}$, prin adunare: $1 = EO\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $EO=\frac{a\cdot b}{a+b}$. Pg. 164. TEST 1. 1. **c.**; 2. i. b; ii. **c.** 3. **a.**$AO = 12,5$ cmși $CO = 7,5$ cm; **b.** $ED = 15$ cm; **c.** 64%. 4. **a.** $\Delta MAB \sim \Delta MCN$ și concluzia; **b.** Se demonstrează că $\frac{NA}{MN}=\frac{l}{CM}$, se adună cu relația de la punctul anterior și se obține concluzia.

TEST 2: 1. 2; 2. 10; 3. 2,25; 4. **a.** Se demonstrează că $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle A$ și se aplică cazul UU; **b.** $CD = 6,4$ cm. 5. **a.** $AM$ = 2 cm, și se calculează raportul; **b.** cazul LUL; **c.** Din asemănare obținem că $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BCM$ și, cum $\sphericalangle BCM + \sphericalangle BMC$ = 90°, obținem concluzia.

## CAPITOLUL 7

Pg. 168. 5. **a.** $2\sqrt{15}$, 16, $4\sqrt{6}$ și $4\sqrt{10}$; **b.** 15, 10, $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{6}$; **c.** 12, 16, 8, $8\sqrt{3}$ și 30°; **d.** 6, 12, 18, $6\sqrt{2}$ și $6\sqrt{3}$. 6. Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este și mediană, $c=\sqrt{6\cdot 12}=6\sqrt{2}$ cm, *înălțimea* este 6 cm. 7. $AB^2=\frac{BC}{2}\cdot BC$, deci $BC=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$ cm, înălțimea este $4\sqrt{2}$ cm. 8. $6\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$ și $2\sqrt{6}$. 9. $AD = 6$ cm, $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $A = 36\sqrt{2}$ cm$^2$ și $P = 12(1+\sqrt{2})$ cm. 10. Construim înălțimea $CE$ în triunghiul dreptunghic $ACB$, $AE = 6$ cm, $EB = 8$ cm, $CE = \sqrt{6\cdot 8}=4\sqrt{3}$ cm, deci $AD = 4\sqrt{3}$ cm. 11. $\Delta ABC$, $AD \perp BC$, $BD = 2AD$, $AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow AD = 2DC$, $BD = 4DC$, $BD + DC$ = 10, deci $DC = 2$ cm și $BD = 8$ cm, $AD = 4$ cm, $AB = 4\sqrt{5}$ cm și $AC = 2\sqrt{5}$ cm. 12. Notăm cu $E$ piciorul înălțimii din $C$, $BE = 4$ cm, $AE = 16$ cm, $CE=\sqrt{16\cdot 4}=8$ cm, $A = 128$ cm$^2$, $BC=\sqrt{4\cdot 20}=4\sqrt{5}$ cm, $P=(32+8\sqrt{5})$ cm. 13. $BC = 18$ cm, $BD = 6$ cm, $DC = 12$ cm, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 6\sqrt{6}$ cm. Pg. 171–172 1. a-3, b-1, c-5, d-2. 2. **a.** $CD = 24$ cm, $AD = 7$ cm; **b.** $BD = 8$cm, $BC = 16$cm, $A_{\Delta ABC} = 120$ cm$^2$. 3. **a.** T.P. în $\Delta AOB$: $AB = 6\sqrt{5}$ cm și se aplică formula înălțimii în același

triunghi dreptunghic: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$; **b.** $\Delta ABO$ dreptunghic și $\sphericalangle BAO = 30°$, $BO = 5$ cm, T.P. $AO = 5\sqrt{3}$ cm, $AC = 10\sqrt{3}$ cm, $BD = 10$ cm, $A_{ABCD} = 50\sqrt{3}$ cm$^2$. **4. a.** 18 cm; **b.** 12 cm. **5. i.** d); **ii.** b); **iii.** c). **6.** T.P. în $\Delta ABD$: $AD = 4$ cm, $P_{ABCD} = (8\sqrt{5} + 8)$ cm, $A_{ABCD} = AD \cdot BD = 32$ cm$^2$. **7.** T.P. în $\Delta ABD$, $BD = 6$ cm, $DC = 10$ cm și aplicăm T.P. în $\Delta ADC$, $AC = 8\sqrt{2}$ cm. **8. a.** $\sphericalangle C = 90°$, **b.** $\sphericalangle E = 90°$; **c.** $\sphericalangle M = 90°$; **d.** $\sphericalangle I = 90°$. **9.** $AB^2 = 196$, $BC^2 = 49$, $AC^2 = 245$ și, aplicând R.T.P., obținem $\sphericalangle ABC = 90°$, deci $ABCD$ este dreptunghi, $BD = AC = 7\sqrt{5}$ cm. **10.** $8^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2$, deci $\sphericalangle ANB = 90°$, mediana $BN$ este și înălțime, $BC = BA = AC$, triunghi echilateral. **11. a.** $DM = 6\sqrt{5}$ cm, $MN = 3\sqrt{5}$ cm; **b.** se calculează și $DN$ și se aplică R.T.P. (*Observație*. Se poate demonstra, folosind asemănarea, că $\sphericalangle AMD$ și $\sphericalangle BMN$ sunt complementare). **12. a.** Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$, $AE = DC = 9$ cm, $EB = 4$ cm, aplicăm T.P. în $\Delta CEB$, $CE = 6$ cm $= AD$; **b.** Aplicăm T.P. în $\Delta ADC$, $AC = 3\sqrt{13}$ cm și verificăm R.T.P. în $\Delta CAB$: $(3\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{13})^2 = 13^2$ adevărat. **13. a.** $AC = 5$ cm, $AM = 6$ cm, $CM = \sqrt{61}$ cm, $\sqrt{61} < \sqrt{64}\,(= 8)$; **b.** $AM = 3$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = = 2\sqrt{10}$ cm, $P = (10 + 2\sqrt{10})$ cm. **14.** $AC = 8\sqrt{3}$ cm; aplicând teorema bisectoarei: $\frac{CD}{AD} = \frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = 3$, $CD = = 3AD$, $AD = 2\sqrt{3}$ cm; aplicăm T.P.: $BD = 6$ cm. **15. a.** Aplicând T.P. în $\Delta ABC$: $BC = 6\sqrt{5}$ cm și în $\Delta ADE$: $DE = 2\sqrt{5}$ cm; **b.** $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}\left(= \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ și $\sphericalangle A$ comun, deci $\Delta ADE \sim \Delta ACB$, $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 3DE$. **16. a.** $\Delta AOD$ echilateral, $AD = AO = AC$:2 = 6 cm; T.P. în $\Delta ABD$: $AB = 6\sqrt{3}$ cm; **b.** $BE = 2\sqrt{3}$, aplicăm T.P. în $\Delta CBE$: $CE = 4\sqrt{3}$ și verificăm R.T.P. în $\Delta CAE$. **17.** $A_{ABCD} = 90$ cm$^2$; dacă $CE \perp AB$, $E \in AB$, $BE = (18 - 12)$ :2 = 3 cm, T.P. în $\Delta CEB$: $BC = 3\sqrt{5}$ cm, $P_{ABCD} = (30 + 6\sqrt{5})$ cm; $AB = 18 - 3 = 15$ cm, T.P. în $\Delta ACE$: $AC = 3\sqrt{29}$ cm. **Aplicația practică.** Folosim perimetrul; trebuie să aproximăm prin adaos la un număr natural. **18.** $BE \perp DC$, $E \in DC$, T.P. în $\Delta BEC$: $BE = 6$ cm, $A_{ABCD} = 96$ cm$^2$; T.P. în $\Delta BED$: $DB^2 = 292$ și verificăm dacă $DB^2 + BC^2 = DC^2$, egalitatea nu se verifică. **19.** $\Delta OAB$ este dreptunghic isoscel, $AO = 3\sqrt{2}$ cm; la fel se obține $CO = 4\sqrt{2}$ cm, deci $AC = 7\sqrt{2}$ cm; T.P. în $\Delta AOD$: $AD = 5\sqrt{2}$ cm; construim înălțimea trapezului care trece prin $O$ și se calculează lungimea ei: 7 cm, $A_{ABCD} = 49$ cm$^2$. **Pg. 176. 1. a.** $\sin C = \frac{2}{3}$; **b.** $\cos F = \frac{5}{8}$; **c.** $\operatorname{tg} B = \frac{3}{2}$; **d.** $\operatorname{ctg} M = \frac{3}{5}$. **2. a.** $BC = 8$ cm; **b.** $MN = 8$ cm; **c.** $OD = 9$ cm. **3.** teorema lui Pitagora: $BC = 3\sqrt{13}$ cm, $\sin B = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos B = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} C = \frac{3}{2}$. **4. a.** $\cos C = \frac{4}{5}$(în $\Delta ADC$); **b.** $AD = 6$ cm (teorema lui Pitagora); **c.** $\sin C = \frac{3}{5}$. **5.** 0,422; 0,422; 0,839; 1,192. **6.** $\sin 40° = 0{,}642$, $AC = 16{,}05$ cm, $\cos 40° = 0{,}766$, $AB = 19{,}15$ cm. **Pg. 180. 1.** 6cm, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sqrt{2}$. **2.** a. 10, $2\sqrt{41}$; **b.** $4\sqrt{21}$, 20; **c.** $2\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$. **3.** a. $4\sqrt{10}$, $8\sqrt{2}$; **b.** $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{6}$; **c.** $6\sqrt{6}$, $6\sqrt{2}$. **4.** 15cm, 7,2cm, 7,5 cm, 5,4cm, 2,1cm, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$. **5.** $6\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm, $30\sqrt{2}$ cm$^2$. **6.** $AB = 16\sqrt{3}$ cm, $AC = 24\sqrt{2}$ cm, $BC = 8(3 + \sqrt{3})$ cm. **7.** $DE = 4$ cm, $A_{ABCD} = 40$ cm$^2$. **8.** a. $2\sqrt{3}$ cm, $4\sqrt{3}$ cm; **b.** 5cm, 2,5cm; **c.** $3\sqrt{6}$ cm, $1{,}5\sqrt{6}$ cm. **9. a.** $10\sqrt{3}$ cm, $75\sqrt{3}$ cm$^2$; **b.** 18 cm, $81\sqrt{3}$ cm$^2$; **c.** $30\sqrt{2}$ cm, $450\sqrt{3}$ cm$^2$. **10.** a. 4cm, $4\sqrt{2}$ cm; **b.** $2{,}5\sqrt{2}$ cm, 5cm; **c.** $3\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{6}$ cm. **11. a.** 32cm, 64 cm$^2$; **b.** $24\sqrt{3}$ cm, 108 cm$^2$; **c.** $40\sqrt{7}$ dm, 700 dm$^2$. **12.** a. $7\sqrt{3}$ cm, 14 cm; **b.** 9 dm, $6\sqrt{3}$ dm; **c.** $2\sqrt{6}$ m, $4\sqrt{2}$ m. **13. a.** $6\sqrt{3}$ cm, $27\sqrt{3}$ cm$^2$; **b.** 8 cm, $16\sqrt{3}$ cm$^2$; **c.** $4\sqrt{6}$ cm, $24\sqrt{3}$ cm$^2$. **14.** $MN = 4\sqrt{6}$ cm, $\frac{A_{\Delta MNP}}{A_{ABCD}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. **Pg. 181. 1.** Se construiește înălțimea $AD$ și se aplică cosinusul unghiului $C$, $BC = 12\sqrt{3}$ cm. **2.** 130. **3.** $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm și 5 cm. **4.** $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, $BD = 7{,}2$ cm, $CD = 12{,}8$ cm. **5.** Se verifică faptul că triunghiul este dreptunghic, $h = 3\sqrt{6}$ cm. **6. a.** $P(6, 6)$ sau $P(6, -6)$; **b.** $P(4\sqrt{3}, 4)$ sau $P(-4\sqrt{3}, 4)$; **c.** $P(-3\sqrt{3}, 9)$ sau $P(-3\sqrt{3}, -9)$. **7.** $7\sqrt{3}$; $98\sqrt{3}$ cm$^2$. **8. a.** $\sphericalangle A = \sphericalangle E = \sphericalangle F = 90°$; **b.** $AF = DE$ și se aplică teorema lui Pitagora. **9.** Se construiește $AD \perp BC$, $D \in BC$, $P = 6(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3)$ cm, $A = 18(1 + \sqrt{3})$ cm$^2$. **10.** a. $\Delta ADE$, $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle A = 30°$, $AD = 6\sqrt{3}$ cm, $AE = 12$ cm=AB, $A_{ABCD} = 72\sqrt{3}$ cm$^2$; **b.** $EM = 4$ cm (teorema catetei în $\Delta ADE$) și $EN = 6$ cm, $MN = 2$ cm. **11.** Se calculează lungimile laturilor triunghiului si se verifică reciproca teoremei lui Pitagora. **12.** $P = (10\sqrt{6} + 8\sqrt{2})$ cm, $A = 64$ cm$^2$. **13.** 96 cm$^2$. **14.** Se construiește $DE \parallel BC$, $E \in AB$ și se demonstrează că $\Delta DAE$ este dreptunghic; $A_{ABCD} = \frac{45\sqrt{6}}{2}$ cm$^2$. **15.** $5\sqrt{5}$ cm. **16. a.** $27\sqrt{3}$ cm$^2$; **b.** 128 cm$^2$; **c.** $60{,}75\sqrt{3}$ cm$^2$. **17. a.** $BN \parallel AM$ (folosind secanta $AB$), $h = 6\sqrt{3}$ cm, $A_{ABNM} = 60\sqrt{3}$ cm$^2$; **b.** $MN = 4\sqrt{7}$ cm. **Pg. 182. TEST 1. 1.** c. **2.** d. **3.** b. **4.** 8 cm. **5.** 16 cm. **6.** 1. **7. a.** Se aplică teorema lui Pitagora în $\Delta ABM$; **b.** $P = 8(\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3)$ cm; **c.** Cu reciproca teoremei lui Pitagora se demonstrează că $\Delta AMN$ este dreptunghic, $\sphericalangle ANM = 90°$ și se folosește faptul că $MN \parallel BD$. **TEST 2. 1. a.** $CE = 8\sqrt{2}$ cm (teorema lui Pitagora în $\Delta BCE$), $P_{AECD} = 8(4 + \sqrt{2})$ cm; **b.** Se aplică teorema lui Pitagora în $\Delta DAE$; **c.** Se calculează $NE$ și $DN$ (teorema catetei), valoarea raportului este 4. **2. a.** Se folosește $\sin 45°$ în

$\Delta ADE$; **b.** $AE = 4$ cm, $BE = 2$ cm și se aplică teorema lui Pitagora în $\Delta BED$, $BD = 2\sqrt{5}$ cm; **c.** $CF = 3\sqrt{5}$ cm și se verifică relația. 3. a. Se verifică rezultatul; **b.** $\sphericalangle BCD = 90°$, se aplică teorema lui Pitagora, $CD = 6$ cm (sau se demonstrează că $\Delta COD$ este echilateral); **c.** $A_{\Delta ABC} = 27\sqrt{3}$ cm² și $A_{\Delta DAC} = 9\sqrt{3}$ cm², valoarea raportului este 3.**Pg. 184–186. Algebră 1.** 17; 21; 24; 32; 5,6; 7,2; 23,5. 2. 2,12; 4,15; 12,12. 3. $\sqrt{32}$; $\sqrt{300}$; $\sqrt{432}$; $\sqrt{1620}$; $-\sqrt{153}$; $-\sqrt{12}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{13a^2}$ dacă $a \geq 0$ sau $-\sqrt{13a^2}$ dacă $a < 0$; $-\sqrt{15a^4}$. 4. $3\sqrt{6}$; $12\sqrt{5}$; $30\sqrt{6}$; $45\sqrt{2}$; $2|a|\sqrt{6}$; $5a^2$; $12|x^3|$; $3|ab^3|\sqrt{2}$; $5|a|\sqrt{5}$. 5. **c.** 6. $\sqrt{15} > \sqrt{13}$; $-\sqrt{32} > -\sqrt{45}$; $5\sqrt{3} > 3\sqrt{5} < -12\sqrt{6} < 6\sqrt{12} < 5\sqrt{5} > 2\sqrt{30}$. 7. $-4\sqrt{5}$; $-3\sqrt{7}$; $-3\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$; $2\sqrt{11}$. 8. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{6}}{9}$; $\frac{4\sqrt{15}}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$; $3\sqrt{6}$, $\frac{3\sqrt{2}}{5}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 9. 17; 9; 10; $9\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; 3; 1; 10; $48\sqrt{6}$; 5; 1; 3; 0; 0; −2. 10. 3 și 1; 27 și 3; $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ și $\sqrt{30}$. 11. $\frac{12\sqrt{3}}{17}$. 12. a, f, f, a, a, f, a, a, f, a, a, a, f, f, a. 14. $\mathbb{R}$; $\sqrt{5}$; $-1$; $3\sqrt{3}$; 6; $-2$; $\varnothing$; $\mathbb{R}$; $-2$; 2; 1; $-3$; $-1$. 16. $(-2; 3)$; $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{2}; 3)$; $(-5; \sqrt{5})$; $(2; -1)$; $(1; 1)$; $(2; 1)$; $(24; 4)$; $(0{,}1; -1)$. 17. 50. 18. $-2$; $-1$; 0; 2. 19. 20 ani. 20. 900 lei, 32%. 21. 7 probleme corecte și 3 probleme greșite. 22. 4 motociclete și 10 autoturisme. 23. 3 copii, 65 lei. 24. 48 și 75; 60. 25. 48. 26. 34; 3,4. 27. 42 și 14. 28. 25, 29, $\frac{45}{7}$, $\frac{35}{9}$, $\frac{63}{5}$. 30. 5. 31. $A \times B = \{(a; -3), (a; -1), (a; 0), (a; 2), (b; -3), (b; -1), (b; 0), (b; 2), (c; -3), (c; -1), (c; 0), (c; 2)\}$, $card A \times B = 12$. 32. $A = \{1; 2\}$ și $B = \{-3; -2; -1\}$. 33. 6 cm²; $P = 4 + \sqrt{13} + 3\sqrt{5}$ cm. 34. $-3$ și 4. 35. 4 cm²; $P = 4 + \sqrt{13} + \sqrt{5}$ cm. 36. $M(0; 4), N(2; 0), P(0; -4), Q(-2; 0)$, 16 cm². 37. Orice notă de la 6 la 10. **Pg. 187–188.** 1. 25 m. 2. $2c + c\sqrt{2} = 16 + 8\sqrt{2}$, unde c este lungimea catetei; $c = 8$, $i = 8\sqrt{2}$, $A = 32$ cm², lungimea medianei este $4\sqrt{2}$ cm. 3. $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, $AB = 2AD$, $AC = 4AD$ și concluzia. 4. a. 54 cm; **b.** 90 cm, $A_{ABCMD} = (324 - 81\sqrt{3})$ cm²; **c.** 150°; **d.** congruență de triunghiuri, $A_{\Delta MAB} = 81(2 - \sqrt{3})$ cm². 5. a. 80 cm2, $P = 20 + 12\sqrt{5}$; **b.** $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; **c.** i. Diametrul $BC$ este perpendicular pe coarda $AE$; ii. $ED \parallel BC$ și $DC = AB = BE$. 6. Triunghiurile $ADB$ și $DCB$ sunt asemenea. 7. a. $BE = 8\sqrt{3}$ cm, $A_{ABCD} = 192$ m²; **b.** Se compară perimetrul cu 60; **c.** aproximativ 20 metri. 8. P = 30 cm; se verifică reciproca teoremei lui Pitagora. 9. **a.** $P = 12 + 4\sqrt{3}$ cm. **b.** $\frac{9}{16}$. **c.** $\sphericalangle C = 30°$, $\sphericalangle B = 60°$. 10. **a.** 84 cm²; **b.** Este adevărată. 11. **a.** 6 cm, $4\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm. **b.** $A = 24\sqrt{3}$ cm2, $P = 12(\sqrt{3} + 1)$ cm. **c.** 3. **d.** 25%. **e.** $4\pi\sqrt{3}$ cm, $48\pi$ cm². 12. Se arată că ariile triunghiurilor $AMB$ și $AMC$ sunt egale. 13. Se demonstrează că $AF$ este mediană în triunghiurile $ADE$ și $ABC$. 14. **a.** cazul LUL; **b.** $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BEC$ și concluzia. 15. **a.** $\sphericalangle NCB = \sphericalangle NBC = 30°$; **b.** $PM$ este linie mijlocie în $\Delta CNB$; **c.** $\Delta PAN$ echilateral, deci $AN = AP$, $PM \parallel AN$ și $PM = AN = NB$:2, și concluzia; **d.** $BC = 18$ cm, $AB = 9\sqrt{3}$ cm, $A_{\Delta ABC} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$ cm², $A_{ANMP} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm². 16. **a.** $MA$ linie mijlocie în $\Delta BCD$; **b.** $\Delta AMP \sim \Delta DPC$ și concluzia; **c.** i. $CD = 4\sqrt{5}$ cm (cu teorema lui Pitagora), $A_{\Delta BCD} = 16\sqrt{5}$ cm²; ii. $d(P, MC) = \frac{2}{3}AM$, raportul ariilor este $\frac{1}{3}$. 17. **a.** $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ și cum $AB = AE$ și $CD = CF$ se obține concluzia; **b.** cazul LUL, folosind punctul anterior; **c.** $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle COF$(din asemănare), $A$, $O$, $C$ coliniare, deci $E$, $O$ și $F$ sunt coliniare. **Pg. 189–190. TEST 1. I. 1)** 0. **2)** $2\sqrt{5}$; **3)** 4,5 cm. **4)** (6; −1). **5)** 6. **6)** 18. **II. 2)** 5 și 4. **4)** −4 și 3. **5)** 8 ani și 32 ani. **6)** $4\sqrt{5}$ cm, $7\sqrt{5}$ cm și $3\sqrt{5}$ cm. **III.** 120°; 36 cm; $9\sqrt{3}$ cm²; $40\sqrt{3}$ cm²; $2\sqrt{13}$ cm; $7\sqrt{3}$ cm. **TEST 2. I. 1)** $-\sqrt{3}$. **2)** 20 ani. **3)** $\{(0; -3), (0; 0), (3; -3), (3; 0)\}$. **4)** 30 cm. **5)** 9 cm. **6)** 10°. **II. 1)** $A \cap \mathbb{N} = \{0; |-3|\}$, $A \cap \mathbb{N} = \{0; |-3|\}$, $A \cap \mathbb{Q} = \{-\frac{1}{7}; -1, (3); \frac{12}{14}; 0; |-3|; 1{,}7; -1{,}325\}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{3\sqrt{2}; \pi\}$. **2)** 4,5 lei. **3)** 60 și 80; 75%. **4)** $\frac{1}{4}$. **5)** $-3$ și 2. **III. 1)** 12 cm; 16 cm; 86 cm. **2)** 120°; 30 cm; $2{,}5\sqrt{3}$ cm și 5 cm.

